



TITLE:

ファブリ・ペロー共振器の励振理論(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

吉田, 靖夫

CITATION:

吉田, 靖夫. ファブリ・ペロー共振器の励振理論. 京都大学, 1970, 工学博士

ISSUE DATE:

1970-11-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k1044>

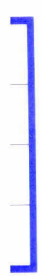
RIGHT:



ファブリ・ペロー共振器の励振理論

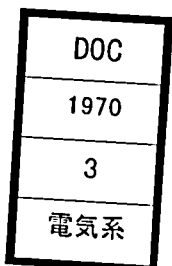
1970年2月

吉 田 靖 夫



目 次

第1章 序 論	1
§ 1・1 ファブリ・ペロー共振器研究の歴史	2
§ 1・2 本論文の梗概	5
第2章 強制励振	9
§ 2・1 序	9
§ 2・2 基礎方程式	10
§ 2・3 基礎方程式の解法および数値結果	17
(1) 基礎方程式の近似解法	17
(2) 励振パワー	20
(3) 共振器内部の場の分布	31
§ 2・4 簡略解	44
§ 2・5 増幅および減衰	52
第3章 半透過鏡を通しての励振	57
§ 3・1 序	57
§ 3・2 基礎方程式	58
§ 3・3 半透過鏡の境界条件	63
§ 3・4 平面波の傾斜入射	67
§ 3・5 自由振動	70
§ 3・6 数値結果	72
第4章 有孔鏡共振器の励振	91
§ 4・1 序	91
§ 4・2 基礎方程式	92
§ 4・3 自由振動モード	97
(1) 回折損失	97
(2) 共振器内部の場の分布	106



(3) 無限長矩形平行平板共振器	113
§ 4・4 一方の鏡のみ有孔の共振器	114
第 5 章 両鏡傾斜共振器の自由振動モード	121
§ 5・1 序	121
§ 5・2 基礎方程式	122
§ 5・3 \cos , \sin モードの分離	127
§ 5・4 回折損失	130
§ 5・5 傾斜パラメータ K の意味	136
第 6 章 結 論	139
謝 辞	140
付録 1・1 マイクロ波, ミリ波におけるファブリ・ペロー 共振器に関する実験	141
付録 2・1 行列要素の計算	144
付録 2・2 行列要素のベキ展開	149
付録 3・1 誘電体多層膜鏡の基準面	150
付録 3・2 積分 1	152
付録 3・3 積分 2	153
付録 3・4 積分 3	154
付録 5・1 積分 4	155
参 考 文 献	159
主要記号表	165

第1章 序 論

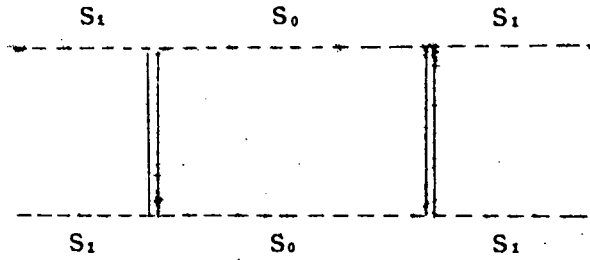
ファブリ・ペロー共振器 (Fabry-Perot resonator) は2枚の鏡を向い合せて、それらの間で電磁波または超音波の共振を行わせるものである。鏡以外には共振器の仕切りはなく、共振器内部と外部空間は連続しているために、別名 open resonator と呼ばれる。元来ファブリ・ペロー共振器は光学分野での高分解能のファブリ・ペロー干渉計として用いられていて、無限の面積をもつ鏡として幾何光学的な面からの解析が行われていた。¹⁾しかし、ファブリ・ペロー共振器の研究が飛躍的に発展したのは、Schawlow, Townes,²⁾ Prokhorov³⁾ によってレーザの可能性が提案され、そのための共振器としてこれがとりあげられたことを契機としたものである。従来干渉計としては2枚の鏡を接近させて用いていたが、レーザ共振器としては、2枚の鏡間にレーザ物質を入れて十分の利得が必要であることから、鏡間隔を拡げて用いるようになった。そのために、開口よりの回折効果が重要となり、波動光学的解析が要求されることとなった。レーザ用の共振器として従来のマイクロ波空洞共振器と類似のものが用いられない理由は、空洞型ではQ値が低いことに加えるに短波長のために波長程度の大きさの共振器を製作できないこと、および製作可能な寸法の空洞共振器を用いると、モード密度が高過ぎて低いQ値と相まって共振の性質が失われることである。そこで、それに代るものとして高いQ値と低いモード密度をもつファブリ・ペロー共振器が用いられることとなった。レーザの発展とともに、ファブリ・ペロー共振器の鏡の形状、配置にも種々の変形が現れた。平面鏡以外に球面鏡を用いるものも多く、特に両凹面鏡の焦点を一致させた配置は、共焦点配置といって、もっとも回折損失の少ないものとして注目されている。ファブリ・ペロー共振器はレーザ共振器用以外に周波数、誘電率の測定、プラズマ診断等に利用される。レーザの発振モードを調べるための走査型干渉計もこの共振器の一変形である。レーザ共振器用としては主に共焦点配置に近いものが用いられるが、それ以外の利用には平行平面配置もしばしば用いられる。広義にはファブリ・ペロー共振器は平面鏡、球面鏡配置いずれをも含んでいるが、狭義には平行平面鏡配置のみを意味する。特に最近では狭義の用法が多い。

§1.1 ファブリ・ペロー共振器研究の歴史

レーザ共振器として用いられるようになって以来、ファブリ・ペロー共振器の理論的解析は主に波動光学的に行われ、それに関する論文の数は現在までに100を越えているものと思われる。ここで、簡単にファブリ・ペロー共振器研究の歴史を振り返ってみることとする。1966年度前半までの研究に関しては小倉、池上^{4),5)}により詳しく紹介されているので、それらに関してはそれ以後の研究の基礎となっている主な論文いくつかについて触れるにとどめ、1966年度後半以後の研究、特に本論文の主題である励振問題に関係する論文について述べることにする。

レーザ共振器として最初の解析はFox, Li⁶⁾によって行われたもので、これは一方の鏡面上の波動がホイゲンズの原理によって伝播して、他方の鏡面上に同じ分布の波動を再生するということを、積分方程式の固有値問題として定式化したものである。固有値が伝播による振幅の減少と位相の偏移を表わす。これは多重反射の干渉計像をもとにしているので、以下ではこれを干渉計理論と呼ぶ。Fox, Li は、矩形平面、円形平面、円形共焦点共振器の場合について、この積分方程式を解くために、電子計算機を使って平面波の初期分布を与えて次第に収束するのを待つというシミュレーションを行なった。以後、平行平面あるいは共焦点配置の共振器に関して、この積分方程式の解を数値的でなく、解析的に求める研究は数多く表われている^{7)~13)}。これらとは別に、Goubau, Schwering¹⁴⁾は、ビーム波伝送理論のために、共焦点配置の場合と同じ積分方程式を解析している。

次に、干渉計理論とはまったく別の立場からファブリ・ペロー共振器を解析している論文をとりあげる。Vainshtein¹⁵⁾は共振器の開口面を平行平面導波管の開口端と見なして、遮断周波数よりわずかに高い周波数の波動が、導波管の壁、すなわち共振器の鏡に殆んど垂直に反射をくり返しつつ、その開口端よりわずかに輻射するという像をもとにして、Wiener-Hopf 法で共振器の自由振動を解析している。小倉、吉田、池上^{16),17)}は、平行平面ファブリ・ペロー共振器のモードの0次近似として閉じた空洞共振器のモードを採用し、開口面からの輻射の反作用を摂動と見なして回折損失を求めている。Risken¹⁸⁾は、1・1図に示すように、平行平面共振器を開口面Soで内、外部に分けて、外部を輻射場とし、内部の場を導波管モードで展開して、So面上での場の連続条件より回折損



1・1図 平行平面ファブリ・ペロー共振器
¹⁸⁾
 Riskenの論文の説明図

失，内部の場の分布を求めている。彼は， S_0 面での境界値を1種類しか問題にしないように， S_0 面上で境界条件を満たすグリーン関数を使っている。そのために，1・1図の S_1 面上において場の法線微係数が0であるという仮定を用いざるを得なかった。^{19), 20)} Oomsは平行平面共振器について波動方程式より出発して，任意の点での波動を鏡の表裏両面からの輻射として記述し，この点を鏡面上にとると境界条件を満たさねばならないことから，鏡面上の波動の満たす斉次積分方程式を得，鏡面上の波動をルジャンドル関数を使って展開することにより積分方程式を行列方程式に書き換えて回折損失を求めている。

以上は自由振動モードの解析を行った主要な論文である。これらの応用の例は枚挙にいとまがないが，そのいくつかを述べる。鏡の傾斜，あるいは曲率の微小変化の回折損失に及ぼす影響に関しては，^{21), 22)} Gloge, ²³⁾ 小倉, 吉田, 古浜, 池上²⁴⁾が摂動論を用いて共焦点配置の場合を扱い，²⁵⁾ Fox, Li, ^{26), 27)} 小倉, 吉田, 池上, ²⁸⁾ Wellsが平行平面配置の場合を扱っている。また，²⁹⁾ Fox, Liはレーザ媒質の利得飽和効果を考慮して発振モードを解析している。彼はレーザ媒質が鏡の直前に厚味のない薄層をなしているとみなして，干渉計理論を用いて計算機によるシミュレーションを行っている。その結果によると発振強度の一番大きいモードは，平行平面鏡配置では最低次モードであるが，共焦点配置ではフレネル数の増加とともに高次モードとなる。¹⁵⁾ FialkovskiiはVainshteinの理論を基礎にして，一次元の矩形平行平面鏡に関して鏡のインピーダンスが場所的に異なる³⁰⁾とき，および3枚の完全反射鏡を平行に並べてできる2つの共振器を回折

効果で結合させたときの³¹⁾解析を行っている。この他、共振器中に結晶媒質を挿入した問題を取扱っている論文等がある。^{32), 33)}

最後に、実際上の問題として重要な励振問題を扱っている論文について述べる。ファブリ・ペロー共振器を使って周波数等の測定、あるいはレーザ増幅を行う場合には、外部より波を入射させて励振しなければならない。このような場合の励振特性等に関する解析は1960年代前半には殆んど行われていない。わずかにVainshtein³⁴⁾が散乱問題におけるS行列理論といわれるものを使って取扱っている。しかし共振器の具体的なモデルをとりあげてこれを計算することは難しく、なされていない。厳密な理論ではないが、Koppelman³⁵⁾は1次元矩形平面鏡共振器の励振問題を取りあげて具体的に場の分布の数値結果を得て、マイクロ波を使った実験結果と比較し、かなりよい一致を示している。これは、共振器内部の場を壁面で0となる導波管モードで近似展開して、その伝播定数の虚数部にFox, Li⁹⁾の得た回折損失を考慮したものである。波動方程式から出発して初めて具体的に励振特性を求めたのは、小倉、吉田、巖本、池上^{36)~39)}である。これは平行平面鏡共振器の一方の鏡面上に強制励振源をおいたものである。この理論の特徴は自由振動モードを求めずに直接励振問題を扱えるところにある。内容は次節で紹介する。この理論を基礎にして、吉田、小倉、池上^{40)~42)}は、一方の鏡が微小透過率を有するときに、外部より平面波を入射させて励振する問題を取扱っている。また特殊な場合として自由振動モードの取扱いも可能であることを示している。彼等は、これを普通の平行平面鏡の場合に適用して、Fox, Li⁶⁾, Vainshtein¹⁵⁾と非常によく一致する回折損失、場の分布を得るとともに、応用として平面鏡が平行の状態から少し傾いた場合、および鏡に結合孔のある⁴³⁾場合の解析を行っている。その後、Fox, Li⁴⁹⁾は干渉計理論で励振に関する問題が取扱えることを示すとともに、計算機によるシミュレーションで小倉、吉田、巖本、池上^{36)~39)}とよく一致する結果を得た。山田、杉尾⁵⁰⁾は、波動方程式から出発してFox, Liの干渉計理論に厳密な根拠を与えるとともに、干渉計理論による励振問題の基礎方程式を与えた。古浜⁵¹⁾は、その基礎方程式を共焦点配置の場合に適用して、鏡面上の場を一般偏平楕円関数で展開して、平面波による励振入力、共振器のQ値を計算している。山田、川野⁵²⁾は、同じく山田、杉尾の理論を基礎として、導波管と球面鏡共振器の結合問題を取りあげている。榎戸、鈴^{53), 54)}

⁵⁴⁾木は、一次元の共焦点型共振器と方形導波管を結合させて、導波管側より見た入力アドミタンスを停留表示で求めて実験と比較している。彼等は、マイクロ波回路の伝送線と空洞の結合の理論に基礎をおいて、共振器の近似固有関数を用いている。赤尾、⁵⁵⁾宮崎⁵⁶⁾も共振器と導波管を結合させて入力インピーダンスを求めている。彼等は、³⁶⁾小倉等と同様に、共振器開口面を仮想境界面として、グリーン関数表示した内、外部の場を境界面で結合している。しかし、彼等は共振器の形を一般的なものとしてベクトル表現を用いているが、実際の計算データを示していない。特殊なものを除いて一般的形状の共振器でこの計算を実行する際には、グリーン関数を得ることが困難であると思われる。

これらの他に、ファブリ・ペロー共振器のQ値等の特性を実験的に研究している論文も多数ある。流体力学におけるレイノルズ数のように、ファブリ・ペロー共振器ではフレネル数によってその特性が定まる。したがって、光波を使った実験では波長程度以下の鏡の微調整をすることは不可能であるが、ミリ波程度の扱い易い波長を使って共振器を適当に大きくすることによって、同じ特性をもつ共振器の実験を行うことができる。これらの実験に関する論文の内容は付録1・1にまとめる。

§1・2 本論文の梗概

本論文は、2枚の平行円板鏡をもつファブリ・ペロー共振器の励振問題を波動方程式から出発して厳密に解析するとともに具体的に励振特性を計算した研究、および種々のファブリ・ペロー共振器、すなわち共振器の一方の鏡が半透過鏡の場合、鏡の中心に結合孔のある場合、および両鏡が異なる方向に傾斜した場合に、その理論を応用した研究をまとめたものである。

第2章には基本となる^{36)~39)}理論を示す。厳密な理論から具体的に励振特性を得たのはこの研究が最初である。励振モデルとしてはもっとも簡単な一方の鏡面上に強制励振源がある場合をとりあげる。スカラー波に対するヘルムホルツ波動方程式の境界値問題として取扱う。鏡面上では励振源を除いて場は0となるものとする。共振器開口面を仮想的境界面として空間を内、外部の2領域に分け、各領域で適当なグリーン関数を用いて場を記述する。境界面で両領域の場をなめらかに接続し、境界面上における2つの未知関数に対する連立積分方程式を

得る。これらの未知関数を固有関数で展開し、展開係数に対する連立一次方程式に帰着させる。これを電子計算機で解き、励振特性ならびに共振器内部の場の分布を得る。さらに、この励振問題を近似解析して励振特性を簡単に求める方法を示し、また、この理論が、共振器内、外部の媒質が異なっている、あるいは媒質の屈折率が複素数であっても適用できることを利用して、内部媒質に利得あるいは吸収のある場合を取扱う。

第3章では、共振器の一方の鏡が微小透過率を有する場合に、これを通して外部より平面波を入射させて励振する問題^{40)~42)}を取扱う。これは実験的にしばしば行われる方法ではあるが、簡単な解析³⁵⁾を除いて本研究以外には理論解析はなされていない。共振器内、外部の場の取扱いは第2章と同様であるが、この両領域以外に入射波の存在する鏡の外側の領域を別に考える。微小透過率をもつ鏡を誘電体鏡と考え、この鏡の両面上での場の関係を求める。これにより共振器内部の場を入射平面波を含む形で表わす。そして第2章同様、内、外部の場を接続する。平面波が鏡に垂直に、またはわずかに傾斜して入射する場合について、励振特性および共振器内部の場の分布を示す。特別の場合として、入射平面波の存在しない場合、すなわち自由振動モードを解析する。

第4章では、共振器の円板鏡の中心に結合孔を有する場合について、励振および自由振動モード^{46), 48)}をとりあげる。両方の鏡に孔のある場合および一方の鏡にのみ孔のある場合の両者を取扱う。両鏡に孔のある場合の自由振動モードに関してはFox, Li²⁵⁾の解析があるが、片鏡のみ孔のある場合の解析は他にはなされていない。全空間を共振器内、外部と結合孔を含む領域の3部分に分け、仮想的境界面を2つ考える。2つの境界面で第2章と同様に場をなめらかに接続し、連立一次方程式を得る。少し面倒な計算をすれば自由振動モードを解くことができ、この場合の回折損失、内部の場の分布を示す。特殊な例として、もっとも簡単なファブリ・ペロー共振器としてしばしば解析される一次元鏡の自由振動を取扱うこともできることを示す。

第5章では、一方の鏡が微小傾斜したときの理論^{37), 43), 44)}を発展させ、両鏡が互いに関連なく任意の方向へ微小傾斜したときの自由振動モード^{45)~47)}を求める。平行平面ファブリ・ペロー共振器においては、傾斜の回折損失に及ぼす影響は大きく、レーザ発振器では鏡の調節は非常に難しい。したがって鏡が傾斜した場合の解

析は重要な意味をもつが、これに関しては、筆者等の文献^{26), 27), 37), 43), 44)}以外には、Fox, Li,²⁵⁾ Wells²⁸⁾ の電子計算機シミュレーションによるもののみであった。また、それらはいずれも片鏡のみ傾斜しているかまたは両鏡が同じ方向に同じ角度だけ対称的に傾斜しているという特殊な場合であった。両鏡が異なる方向へ異なる角度だけ傾斜するという現実的問題をとりあげた論文は、本研究以外には、発表されていない。本研究では、鏡の傾斜の及ぼす効果は第2章の強制励振源に相当するものであることを示して、励振理論の解析を利用する。傾斜鏡の場合の特徴として、角度方向に関して異なる分布をもつモード間に結合が生じることに注意して解析を行う。

第2章 強制励振

§2.1 序

本章では、平行円板鏡ファブリ・ペロー共振器の励振問題を、スカラー波に対するヘルムホルツ波動方程式の境界値問題としてとりあげる。§2.2では、共振器の開口面に仮想的な境界面を考え、全空間を共振器の内、外部の2つの領域に分ける。共振器内部では導波管モードのグリーン関数で場を記述する。これは、励振問題では自由振動と異なり、任意の周波数を考慮しなければならないために、内部の場を導波管波で記述することが適当であることによる。共振器外部では自由空間の輻射場のグリーン関数を使い場を記述する。励振に関するもっとも簡単なモデルとして、一方の鏡面上内部に強制励振源をおく。これは、実験でよく行われているように半透過鏡を通して共振器中へ波を入射させて励振するとき、鏡の透過率が0に近づいた極限の場合である。次に、共振器内、外部の場を境界面でなめらかに接続することにより、境界面上における場の値とその法線微係数に対する連立積分方程式を得る。これら2つの未知関数を固有関数で展開し、連立積分方程式を展開係数に対する無限次元の連立一次方程式に帰着させ、これを基礎方程式と呼ぶ。§1.2で紹介した自由振動を取扱ったRiskénの論文¹⁸⁾と異なるところは次のところである。Riskénの場合は、境界面で1種類の境界値のみを問題とするように定式化したために、1.1図の S_1 上で場の法線微係数が0となる仮定が必要であった。しかし本論文では、2種類の境界値を問題にすることにより、その仮定の代りに鏡の外側の面上で場の法線微係数が0となる仮定に変っている。これは、共振器寸法が波長に比して十分大きいから、鏡の裏面までまわりこむ場は十分小さいと考えたことによる。山田⁵⁷⁾はこの両者の仮定をWiener-Hopf法で評価し、本論文の仮定の方がよりよいことを証明している。

§2.3では、§2.2で得た基礎方程式の特徴を利用した解法を述べる。この基礎方程式を解くことによって、開口面より輻射されるパワーおよび共振器内部の場の分布を求めることができる。ここでは、電子計算機を使って求めた励振周波数に対する輻射パワー、場の分布の数値例を示す。以上の結果は少

し面倒な計算プログラムを要する。そこで § 2・4 では、共振点付近の振舞に関しては、簡略な近似式で十分良い解が得られることを示す。これは、共振点付近の周波数では 1 つの導波管モードのみが特に強く励振されることにより可能である。§ 2・5 では、本理論は共振器内、外部の媒質の誘電率が異なっても適用できることおよび複素誘電率でもよいことを利用して、共振器内部の媒質の誘電率に虚数部を考慮することにより、増幅および減衰のある場合の励振特性を得る。なお、本章の解析は第 3 章以下の解析の基礎となるものである。

§ 2・2 基礎方程式

共振器は 2 枚の半径 a の円板型鏡を間隔 L だけ離して平行に配置したものとする。鏡は完全反射鏡であるとし、励振源は鏡面上に一定の強さで分布しているものとする。共振器の内、外部は自由空間とする。この励振問題をスカラー波に対する境界値問題としてとりあげ、次のように問題設定を行う。ヘルムホルツ波動方程式

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + k^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2 \cdot 1)$$

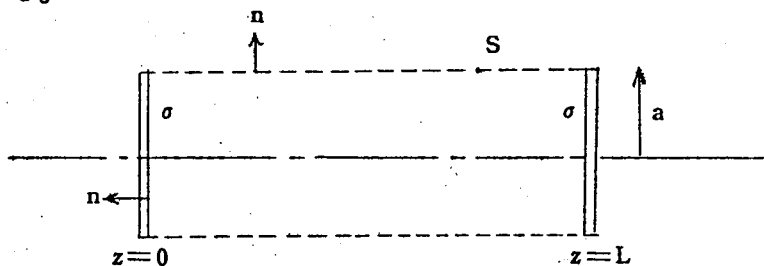
を満たす波動関数 $\varphi(\mathbf{r})$ は、 $z = 0$ および $z = L$ に位置する完全反射鏡の両面上において、次の条件を満たすものとする。

$$\varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad ; \quad \mathbf{r} : \text{鏡面上} \quad (2 \cdot 2)$$

ただし励振源は鏡の内部面上の一部に分布するものとし、そこでは次の条件を満たすものとする。

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) \quad ; \quad \mathbf{r} : \text{鏡の内部面上の一部} \quad (2 \cdot 3)$$

また外部無限遠方では輻射条件を満たすものとする。なお鏡の厚さは無限に薄いものとする。



2・1図 ファブリ・ペロー共振器

前述の問題を解くために、2・1図に示すように、 $r = a$ の位置の仮想的円筒面 S において共振器を内、外部の2領域に分け、各領域の場を適当なグリーン関数で記述する。内部の場の記述には次のグリーン関数 $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$ を用いる。 $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$ は共振器内部において

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2 \cdot 4)$$

を満たし、鏡面内部において場と同じ境界条件

$$G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = 0 \quad ; \quad z \text{ または } z' = 0 \text{ または } L \quad (2 \cdot 5)$$

を満たす。ただし、 $\delta(\mathbf{r})$ はディラックのデルタ関数である。この $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$ を用いると内部の場は

$$\begin{aligned} \varphi_i(\mathbf{r}) = & - \int_0 \frac{\partial G(\mathbf{r} | \mathbf{r}')}{\partial n'} \cdot \varphi_0(\mathbf{r}') d\sigma' \\ & + \int_S \left[G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r} | \mathbf{r}')}{\partial n'} \cdot \varphi(\mathbf{r}') \right] dS' \end{aligned} \quad (2 \cdot 6)$$

と表わせる。 n は2・1図に示す法線方向である。 σ は励振源を示す。また $d\sigma'$, dS' のプライム ($'$) は \mathbf{r}' に関して積分することを示す。グリーン関数 $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$ の具体的な形としては次の円筒座標表示形を用いる。

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = & \frac{i}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \\ & \sum_{\ell=0}^{\infty} \epsilon_{\ell} J_{\ell}\left(A_n \frac{r}{a}\right) H_{\ell}^{(1)}\left(A_n \frac{r'}{a}\right) \cos \ell(\theta - \theta') \\ & (r < r', \quad 0 \leq z, z' \leq L) \end{aligned} \quad (2 \cdot 7)$$

$r > r'$ のときは (2・7) で r と r' を交換する。ただし

$$A_n^2 = (ka)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \quad (2 \cdot 8)$$

$$\epsilon_{\ell} = \begin{cases} 1 & ; \ell = 0 \\ 2 & ; \ell \geq 1 \end{cases} \quad (2 \cdot 9)$$

* グリーンの公式

$$\int_V (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dV = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS$$

において $u = \varphi$, $v = G$ において (2・2) ~ (2・5) を用いると (2・6) を得る。

である。 $J_\ell(x)$ はベッセル関数であり、 $H_\ell^{(1)}(x)$ は第1種ハンケル関数で今後簡単化のため $H_\ell(x)$ と略記する。

外部の場合は自由空間のグリーン関数 $H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ を用いて記述する。すなわち

$$H(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2 \cdot 10)$$

を用いる。これは $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ と同じく

$$\nabla^2 H(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + k^2 H(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (2 \cdot 11)$$

を満たす。具体的には $H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ の円筒座標表示^{4), 17)}されたもの

$$H(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{i}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon_\ell \cos \ell(\theta - \theta') \int_0^\infty J_\ell(\sqrt{k^2 - h^2} r) H_\ell(\sqrt{k^2 - h^2} r') \cos h(z - z') dh$$

$$(r' > r) \quad (2 \cdot 12)$$

を用いる。ただし (2・12) で、 $r > r'$ のときは r と r' を交換する。励振は共振器内部の鏡面で行っており、また共振器寸法は波長 λ に比べて十分大きいから、内部の場合は殆んど z 方向に往復する定在波であって、鏡の外面にまでまわりこまないと考えられる。そこで

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n} \cong 0 \quad ; \quad \mathbf{r} : \text{鏡の外面上} \quad (2 \cdot 13)$$

と近似する。^{*} これにより外部の場合は

$$\varphi_e(\mathbf{r}) = - \int_S \left[H(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}') \right] dS' \quad (2 \cdot 14)$$

と近似できる。

開口面 S は実際には物体の存在しない仮想的な境界面であるから、そこでは場はなめらかにつながっている。すなわち共振器内、外部の場とその法線微係数は S 上 ($r=a$) で等しい。

$$[\varphi_i]_{r=a-0} = [\varphi_e]_{r=a+0} \quad (2 \cdot 15)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right]_{r=a-0} = \left[\frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right]_{r=a+0} \quad (2 \cdot 16)$$

⁵⁷⁾
* 山田は Wiener-Hopf 法を使って鏡の外面上での $\partial \varphi / \partial n$ と内面上でのそれとの比が $(ka)^{-3/2}$ の程度であることを示した。

(2・6) および (2・14) により上式を具体的に書くと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\partial G(a, \theta, z | r', \theta', 0)}{\partial z'} \varphi_0(r', \theta') r' dr' d\theta' \\
 & + \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[G(a, \theta, z | a, \theta', z') \frac{\partial \varphi(a, \theta', z')}{\partial r'} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial G(a-0, \theta, z | a, \theta', z')}{\partial r'} \varphi(a, \theta', z') \right] a d\theta' dz' \\
 & = - \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[H(a, \theta, z | a, \theta', z') \frac{\partial \varphi(a, \theta', z')}{\partial r'} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial H(a+0, \theta, z | a, \theta', z')}{\partial r'} \varphi(a, \theta', z') \right] a d\theta' dz' \quad (2 \cdot 17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\partial^2 G(a-0, \theta, z | r', \theta', 0)}{\partial r \partial z'} \varphi_0(r', \theta') r' dr' d\theta' \\
 & + \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial G(a-0, \theta, z | a, \theta', z')}{\partial r} \cdot \frac{\partial \varphi(a, \theta', z')}{\partial r'} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^2 G(a-0, \theta, z | a, \theta', z')}{\partial r \partial r'} \varphi(a, \theta', z') \right] a d\theta' dz' \\
 & = - \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial H(a+0, \theta, z | a, \theta', z')}{\partial r} \cdot \frac{\partial \varphi(a, \theta', z')}{\partial r'} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^2 H(a+0, \theta, z | a, \theta', z')}{\partial r \partial r'} \varphi(a, \theta', z') \right] a d\theta' dz' \quad (2 \cdot 18)
 \end{aligned}$$

$a \pm 0$ は、グリーン関数の $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ における特異性を考慮して、 $r \rightarrow a$ の極限のとり方を示したものである。

(2・17) および (2・18) の連続条件は開口面 S 上の関数 φ および $\partial \varphi / \partial n$ を未知関数とする連立積分方程式である。この2個の関数を求めれば、(2・6), (2・14) により共振器内、外部の任意の場所における場を求めることができる。しかしこのままでは解き得ないため、次のように無限次元の連立一次方程式に書き換える。 S 上の未知関数を次に示すように完全直交系で展開する。

$$\varphi(a, \theta, z) = \sum_{n, \ell, \pm} b_{n\ell}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\}, \quad (2 \cdot 19)$$

$$\frac{\partial \varphi(a, \theta, z)}{\partial r} = \frac{1}{a} \sum_{n, \ell, \pm} a_{n\ell}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\} \quad (2 \cdot 20)$$

$$(n = 1, 2, \dots, \ell = 0, 1, 2, \dots)$$

ただし $a_{n\ell}^{\pm}, b_{n\ell}^{\pm}$ は未知の展開係数であり, +, - はそれぞれ { } 内の $\cos \ell\theta, \sin \ell\theta$ の項に対応する。

(2 · 17), (2 · 18) の両辺に直交関数 $\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\}$ をかけて S 面上で積分する。その際 (2 · 7), (2 · 12) のグリーン関数および (2 · 19), (2 · 20) の展開を代入して,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n'\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos \ell\theta \cdot \cos \ell'\theta}{\sin \ell\theta \cdot \sin \ell'\theta} \right\} d\theta dz = \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \cdot \frac{\pi L}{\varepsilon_\ell} \quad (2 \cdot 21)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n'\pi z'}{L}\right) \cosh(z-z') dz dz' \\ &= \left(\frac{n\pi}{L}\right) \left(\frac{n'\pi}{L}\right) \frac{[1+(-1)^{n-n'}] \cdot [1-(-1)^n \cosh L]}{[h^2 - (\frac{n\pi}{L})^2] \cdot [h^2 - (\frac{n'\pi}{L})^2]} \end{aligned} \quad (2 \cdot 22)$$

を用いると, (2 · 17), (2 · 18) の連立積分方程式は $a_{n\ell}^{\pm}, b_{n\ell}^{\pm}$ に対する次の無限次元の連立一次方程式になる。この方程式を基礎方程式と呼ぶ。

$$\begin{aligned} & J_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_{n\ell}^{\pm} - A_n J_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_{n\ell}^{\pm} \\ & + 8N \left\{ \sum_m K_{nm}^\ell a_{m\ell}^{\pm} - \sum_m L_{nm}^\ell b_{m\ell}^{\pm} \right\} = -2\varepsilon_\ell N H_\ell(A_n) \psi_{n\ell}^{\pm} \end{aligned} \quad (2 \cdot 23)$$

$$\begin{aligned} & A_n J'_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_{n\ell}^{\pm} - A_n^2 J'_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_{n\ell}^{\pm} \\ & + 8N \left\{ \sum_m M_{nm}^\ell a_{m\ell}^{\pm} - \sum_m N_{nm}^\ell b_{m\ell}^{\pm} \right\} = -2\varepsilon_\ell N A_n H'_\ell(A_n) \psi_{n\ell}^{\pm} \end{aligned} \quad (2 \cdot 24)$$

(n = 1, 2, \dots, \ell = 0, 1, 2, \dots)

ただし

$$N \equiv \frac{a^2 n}{2L^2} \quad (2 \cdot 25)$$

であるが、実際に (2・23), (2・24) を解く際に問題となる n は、共振器内で z 方向に存在する波数 (共振器長 L を半波長 $\lambda/2$ でわったもの) には等しいところのみであるから、

$$n \cong 2L/\lambda \quad (2 \cdot 26)$$

を (2・25) に用いて

$$N \cong \frac{a^2}{L\lambda} \quad (2 \cdot 27)$$

となる。これはフレネル数と呼ばれるものである。(2・23), (2・24) の右辺の $\psi_{n\ell}^{\pm}$ は

$$\psi_{n\ell}^{\pm} \equiv \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a J_{\ell}(A_n \frac{r}{a}) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \ell\theta \right\} \varphi_0(r, \theta) r dr d\theta \quad (2 \cdot 28)$$

で定義されるもので、これは励振の強度を表わす。(2・23), (2・24) の左辺の行列要素 K_{nm}^{ℓ} , L_{nm}^{ℓ} , M_{nm}^{ℓ} , N_{nm}^{ℓ} は

$$K_{nm}^{\ell} \equiv \int_0^{\infty} H_{\ell}(A) J_{\ell}(A) I_{nm}(\kappa) d\kappa, \quad (2 \cdot 29)$$

$$L_{nm}^{\ell} \equiv \int_0^{\infty} A H_{\ell}(A) J'_{\ell}(A) I_{nm}(\kappa) d\kappa, \quad (2 \cdot 30)$$

$$M_{nm}^{\ell} \equiv \int_0^{\infty} A H'_{\ell}(A) J_{\ell}(A) I_{nm}(\kappa) d\kappa, \quad (2 \cdot 31)$$

$$N_{nm}^{\ell} \equiv \int_0^{\infty} A^2 H'_{\ell}(A) J'_{\ell}(A) I_{nm}(\kappa) d\kappa \quad (2 \cdot 32)$$

で定義される。ただし

$$A^2 \equiv (ka)^2 - \kappa^2, \quad (2 \cdot 33)$$

である。 $I_{nm}(\kappa)$ は $n-m$ が奇数のときは (2・22) により 0 であり、偶数のときは

$$I_{nm}(\kappa) \equiv (ka) \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{1 - (-1)^n \cos(\kappa \frac{L}{a})}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L} \right)^2 - \kappa^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{m\pi a}{L} \right)^2 - \kappa^2 \right]}; (n-m = \text{偶数}) \quad (2 \cdot 34)$$

である。ファブリ・ペロー共振器では $\lambda \ll L$ であるので、 n, m は非常に大きい数、例えばレーザ発振器では $10^5 \sim 10^7$ であり、また (2・23), (2・24) は $|n-m|/n \ll 1$ の範囲の項のみで近似よく解き得ることにより、(2・34) における m/n は 1 とおいてさしつかえない。(2・23), (2・24) の

基礎方程式は θ 方向のモード番号 ℓ および +, - に関して分離していることに注目すべきである。以下に示すように, 行列要素 K_{nm}^ℓ , L_{nm}^ℓ , M_{nm}^ℓ および N_{nm}^ℓ は, フレネル数 N と, (2・8) で定義される A_n の関数である。したがって基礎方程式 (2・23), (2・24) も, パラメータとして, フレネル数 N , および周波数の関数である A_n のみを含み, 共振器長 L および鏡の半径 a そのものを直接パラメータとして含まない。

(2・29) ~ (2・32) の行列要素の計算は付録 2・1 にまわし, ここには最終結果のみを示すこととする。

$$\alpha^2 \equiv \frac{1}{4\pi N} \quad (2 \cdot 35)$$

で定義される α が $\alpha^2 \ll 1$ の条件を満たすとき, (2・29) ~ (2・32) は, $n-m$ が偶数のとき, 以下のようになる。

$$K_{nm} = \frac{1}{A_m^2 - A_n^2} \left[\{s(A_n^2) - c(A_n^2)\} - \{s(A_m^2) - c(A_m^2)\} \right] \\ - \frac{i}{A_m^2 - A_n^2} \left[\{s(A_n^2) + c(A_n^2)\} - \{s(A_m^2) + c(A_m^2)\} \right]; \quad n \neq m, \quad (2 \cdot 36)$$

$$K_{nn} = \left[\alpha^2 \{s(A_n^2) + c(A_n^2)\} - \{s'(A_n^2) - c'(A_n^2)\} \right] \\ + i \left[\alpha^2 \{s(A_n^2) - c(A_n^2)\} + \{s'(A_n^2) + c'(A_n^2)\} \right], \quad (2 \cdot 37)$$

$$L_{nm} = -\frac{1}{2} K_{nm}; \quad n \neq m, \quad (2 \cdot 38)$$

$$L_{nn} = \frac{1}{2} K_{nn} - i \frac{\alpha^2}{2}, \quad (2 \cdot 39)$$

$$M_{nm} = L_{nm}; \quad n \neq m \quad (2 \cdot 40)$$

$$M_{nn} = L_{nn} + i\alpha^2 \quad (2 \cdot 41)$$

$$N_{nm} = \frac{1}{A_m^2 - A_n^2} \left[A_n^2 \{s(A_n^2) - c(A_n^2)\} - A_m^2 \{s(A_m^2) - c(A_m^2)\} \right] \\ - \frac{i}{A_m^2 - A_n^2} \left[A_n^2 \{s(A_n^2) + c(A_n^2)\} - A_m^2 \{s(A_m^2) + c(A_m^2)\} \right]; \quad n \neq m \quad (2 \cdot 42)$$

$$N_{nn} = \left[\alpha^2 A_n^2 \{s(A_n^2) + c(A_n^2)\} - \{s(A_n^2) - c(A_n^2)\} - A_n^2 \{s'(A_n^2) - c'(A_n^2)\} \right] \\ + i \left[\alpha^2 A_n^2 \{s(A_n^2) - c(A_n^2)\} + \{s(A_n^2) + c(A_n^2)\} + A_n^2 \{s'(A_n^2) + c'(A_n^2)\} \right] \quad (2 \cdot 43)$$

$n-m$ が奇数のときは上記行列要素はすべて0となる。ここで $s(t)$, $c(t)$ は $(A2 \cdot 10)$, $(A2 \cdot 11)$ で定義される関数であり, $s'(t)$, $c'(t)$ はそれぞれ $s(t)$, $c(t)$ の t に関する微分を示す。 $s(t)$, $c(t)$ は回折問題にしばしば現れる Fresnel 積分

$$S(t) \equiv \int_0^t \sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) dy, \quad (2 \cdot 44)$$

$$C(t) \equiv \int_0^t \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) dy \quad (2 \cdot 45)$$

と次の関係がある。

$$s(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} S\left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \alpha\right), \quad (2 \cdot 46)$$

$$c(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} C\left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \alpha\right) \quad (2 \cdot 47)$$

(2・36) ~ (2・43) の行列要素の記号 K_{nm}^ℓ 等の肩符 ℓ を省略して K_{nm} 等と書いた理由は, 付録2・1に述べたように, $\alpha^2 \ll 1$ のときこれらの行列要素がベッセル関数の次数 ℓ に依存しないためである。

$\alpha^2 A_n^2 \ll 1$ の場合には, 行列要素の対角要素 ($n=m$) は付録2・2に示す如くベキ展開可能である。これらのベキ展開表示は簡略解を求める際に有用である。

§2・3 基礎方程式の解法および数値結果

本節では前節で得た基礎方程式の特徴を利用した近似解法を行う。数値例としては, 鏡面の中心の一部分で平面波である強制励振を考える。これは回転対称な励振であるから $\ell=0$ のモードしか励振しない。次に $\ell \neq 0$ のモードを励振するために, 源の強度を $\cos \ell \theta (r/a)^\ell$ とする。ここにおける強制励振は, 次章の半透過鏡を通しての励振の場合の透過率 T が $T \rightarrow 0$ の極限になっている。したがって本節の例は, 透過率の小さい鏡に外部より波を入射させた場合の近似となる。

(1) 基礎方程式の近似解法

ここに前節の基礎方程式 (2・23), (2・24) を再掲し, その特徴を述べる。

$$\left. \begin{aligned}
 & J_{\ell}(A_n) H_{\ell}(A_n) a_{n\ell}^{\pm} - A_n J_{\ell}(A_n) H'_{\ell}(A_n) b_{n\ell}^{\pm} \\
 & + 8N \sum_m \{ K_{nm} a_{m\ell}^{\pm} - L_{nm} b_{m\ell}^{\pm} \} = -2\epsilon_{\ell} N H_{\ell}(A_n) \psi_{n\ell}^{\pm} \\
 & A_n J'_{\ell}(A_n) H_{\ell}(A_n) a_{n\ell}^{\pm} - A_n^2 J'_{\ell}(A_n) H'_{\ell}(A_n) b_{n\ell}^{\pm} \\
 & + 8N \sum_m \{ M_{nm} a_{m\ell}^{\pm} - N_{nm} b_{m\ell}^{\pm} \} = -2\epsilon_{\ell} N A_n H'_{\ell}(A_n) \psi_{n\ell}^{\pm} \\
 & (n = 1, 2, \dots, \ell = 0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 48)$$

この無限次元の連立方程式は, 角方向のモード番号 ℓ および $+$, $-$ (\cos , \sin) に関して分離しており, それぞれ別の連立方程式として解けばよい。また, 上式は, モード間の結合を表わす K_{nm} , L_{nm} , M_{nm} , N_{nm} が, $n-m$ が奇数のときは, 0 であるから, n , m に関して偶数と奇数とに分離して解けばよい。

実際にこの連立方程式を解くに際し, 次の物理的事実を考慮する。すなわち m , n は共振器の縦方向にのっている波の数を表わす。しかるに, ファブリ・ペロー共振器では, 波の存在形態は両鏡間の往復運動であると見なせるから, m , n が共振器長 L を半波長 $\lambda/2$ でわった商, $2L/\lambda$ の付近の整数をとる場合にのみ, 展開係数 a_n , b_n^* が大きくなるのが容易に類推される。これは実際に計算を行って確かめることができる。すなわち, $2L/\lambda$ の整数部分を n_0 と定義すると, この n_0 の前後の数十項の a_n , b_n のみを考慮することにより, 共振器入力パワーおよび共振器内部の場の分布が決定される。特にフレネル数 N が $N \gg 1$ のとき, 入力パワーおよび場の分布の概略値を得るためには, a_{n_0} , b_{n_0} のみを考慮すればよい。

基礎方程式 (2・48) で源分布 $\varphi_0(r, \theta)$ が与えられると, (2・28) により ψ_n が決定し, a_n , b_n が求められる。この際, パラメータとしてはフレネル数 N と, (2・8) で定義される周波数の関数である A_n のみである。行列要素 K_{nm} 等はこの両者の関数である。そしてまた A_n は次の如く書き換えら

* 基礎の連立方程式 (2・48) は ℓ および $+$, $-$ に関しては分離しているから, 今後特に紛わしい場合を除いて, $a_{n\ell}^{\pm}$, $b_{n\ell}^{\pm}$, $\psi_{n\ell}^{\pm}$ をそれぞれ a_n , b_n , ψ_n と略記する。

** $n = n_0$ に対して, A_n^2 は正で最小の値となる。

れる。

$$A_n^2 \equiv (ka)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 = \{(ka)^2 - \left(\frac{n_0\pi a}{L}\right)^2\} - \left\{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 - \left(\frac{n_0\pi a}{L}\right)^2\right\}$$

$$\cong A_{n_0}^2 - \frac{2n_0\pi^2 a^2}{L^2} (n - n_0) = A_{n_0}^2 - 4\pi^2 N (n - n_0), \quad (2 \cdot 49)$$

$$A_{n_0}^2 \equiv (ka)^2 - \left(\frac{n_0\pi a}{L}\right)^2 \cong \frac{2n_0\pi^2 a^2}{L^2} \left(\frac{kL}{\pi} - n_0\right)$$

$$= 4\pi^2 N \left(\frac{2L}{\lambda} - n_0\right) \quad (2 \cdot 50)$$

ただし (2・49) の近似式では、鏡間隔が波長に比べて極端に大きい場合を想定し、 $|n - n_0| / n_0 \ll 1$ としている。実際のレーザ発振器では n_0 は $10^5 \sim 10^7$ であって、計算において $|n - n_0|$ は 10^2 までで十分収束するから、上の近似は成立する。(2・49)、(2・50) の結果は、基礎方程式のパラメータは、フレネル数 N と、周波数を示す $2L/\lambda - n_0$ のみであることを示している。そしてこれらのパラメータの物理的意味は次の如くである。 $2L/\lambda$ が丁度整数のときは平面波共振（面積が無限大の2枚の鏡間での共振）を意味するから、 $2L/\lambda - n_0$ は平面波共振からのずれの周波数である。フレネル数 N とは $(a/L) / (\lambda/a)$ のことである。 a/L は一方の鏡から他方の鏡を見込む角を表わし、 λ/a は、半径 a の孔に光が入射したときの回折角の程度を示すパラメータである。フレネル数はその両者の比として定義されており、一方の鏡が他方の鏡より受ける光量を表わすパラメータと考えられる。フレネル数の語源は、一方の鏡の中心に光源をおいたときの、他方の鏡に含まれるフレネル帯の数の意味である。

(2・48) の基礎方程式に対して以下のように近似解法を行う。 K_{nm} ($n \neq m$) 等の非対角行列要素が、 K_{nn} 等の対角行列要素に比して、1次の微小量と見なせるほど十分小さいことを利用する。これは (2・7) で表わされる導波管モード $\sin(n\pi z/L) \cdot \cos \ell\theta \cdot J_\ell(A_n r/a)$ が開口面で反射される時に、異なる n へのモード変換が小さいということである。基礎方程式を次の形に書き換える。

$$\left. \begin{aligned}
& \{ J_{\ell}(A_n) H_{\ell}(A_n) + 8NK_{nn} \} a_n - \{ A_n J_{\ell}(A_n) H'_{\ell}(A_n) + 8NL_{nn} \} b_n \\
& = -2 \varepsilon_{\ell} N H_{\ell}(A_n) \psi_n - 8N \sum_{m \neq n} \{ K_{nm} a_m - L_{nm} b_m \} \\
& \{ A_n J'_{\ell}(A_n) H_{\ell}(A_n) + 8NM_{nn} \} a_n - \{ A_n^2 J'_{\ell}(A_n) H'_{\ell}(A_n) + 8NN_{nn} \} b_n \\
& = -2 \varepsilon_{\ell} N A_n H'_{\ell}(A_n) \psi_n - 8N \sum_{m \neq n} \{ M_{nm} a_m - N_{nm} b_m \}
\end{aligned} \right\} (2 \cdot 51)$$

非対角要素は対角要素に比し，1次の微小量と見なして， a_n, b_n を

$$\left. \begin{aligned}
a_n &= a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \dots \\
b_n &= b_n^{(0)} + b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + \dots
\end{aligned} \right\} (2 \cdot 52)$$

の様に0次，1次，2次……，の微小量による展開を行うとき，(2・51)の方程式は，同じ次数の微小量に対する，次の一連の方程式に帰着する。

$$\left. \begin{aligned}
& \{ J_{\ell}(A_n) H_{\ell}(A_n) + 8NK_{nn} \} a_n^{(0)} - \{ A_n J_{\ell}(A_n) H'_{\ell}(A_n) + 8NL_{nn} \} b_n^{(0)} \\
& = -2 \varepsilon_{\ell} N H_{\ell}(A_n) \psi_n \\
& \{ A_n J'_{\ell}(A_n) H_{\ell}(A_n) + 8NM_{nn} \} a_n^{(0)} - \{ A_n^2 J'_{\ell}(A_n) H'_{\ell}(A_n) + 8NN_{nn} \} b_n^{(0)} \\
& = -2 \varepsilon_{\ell} N A_n H'_{\ell}(A_n) \psi_n
\end{aligned} \right\} (2 \cdot 53)$$

$$\left. \begin{aligned}
& \{ J_{\ell}(A_n) H_{\ell}(A_n) + 8NK_{nn} \} a_n^{(s)} - \{ A_n J_{\ell}(A_n) H'_{\ell}(A_n) + 8NL_{nn} \} b_n^{(s)} \\
& = -8N \sum_{m \neq n} \{ K_{nm} a_m^{(s-1)} - L_{nm} b_m^{(s-1)} \} \\
& \{ A_n J'_{\ell}(A_n) H_{\ell}(A_n) + 8NM_{nn} \} a_n^{(s)} - \{ A_n^2 J'_{\ell}(A_n) H'_{\ell}(A_n) + 8NN_{nn} \} b_n^{(s)} \\
& = -8N \sum_{m \neq n} \{ M_{nm} a_m^{(s-1)} - N_{nm} b_m^{(s-1)} \}
\end{aligned} \right\} (2 \cdot 54)$$

$s = 1, 2, 3, \dots$

以上によって， ψ_n が与えられれば(2・53)をまず解いて，この結果を(2・54)右辺に代入して $s=1$ の場合を解き，次に $s=2$ の場合を解くというように逐次近似を上げてゆくことができる。なお数値計算の際に， A_n が虚数のときはベッセル関数，ハンケル関数は変形ベッセル関数となる。

(2) 励振パワー

単位面積当りの時間平均エネルギー束すなわち電力の流れは

$$\mathbf{s} \equiv \text{Re} \left(\frac{\varphi^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r})}{i k} \right) \quad (2 \cdot 55)$$

で与えられる。⁵⁸⁾ *印は複素共軛を意味する。波動方程式 (2・1) を用いると

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{s} &= \text{Re} \left\{ \nabla \cdot \left(\frac{\varphi^* \nabla \varphi}{i k} \right) \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{1}{i k} (|\nabla \varphi|^2 - k^2 |\varphi|^2) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2 \cdot 56)$$

となり、電力の流れ \mathbf{s} は保存されることが判る。(2・55) を共振器の内部の領域 V で積分することにより次式が成立する。

$$P \equiv \frac{1}{k} \text{Im} \left(\int_{\sigma} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\sigma \right) = \frac{1}{k} \text{Im} \left(\int_S \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS \right) \quad (2 \cdot 57)$$

これは励振入力であって、鏡面 σ を通って流入する電力と、開口面 S より流出する電力が等しいことを示している。(2・57) 右辺の S 上の積分(2・19), (2・20) を用いて表わせば

$$P = \frac{\pi L}{k} \text{Im} \left(\sum_{n\ell\pm} \frac{b_{n\ell}^{\pm*} a_{n\ell}^{\pm}}{\varepsilon_{\ell}} \right) \quad (2 \cdot 58)$$

となる。

以下に、周波数と励振パワーの関係を数値例により示す。最初に、半径 εa の領域内で一定の強さの源分布である励振、すなわち平面波による励振を考える。

$$\varphi_0(r, \theta) = 1 \quad ; \quad r \leq \varepsilon a \quad (2 \cdot 59)$$

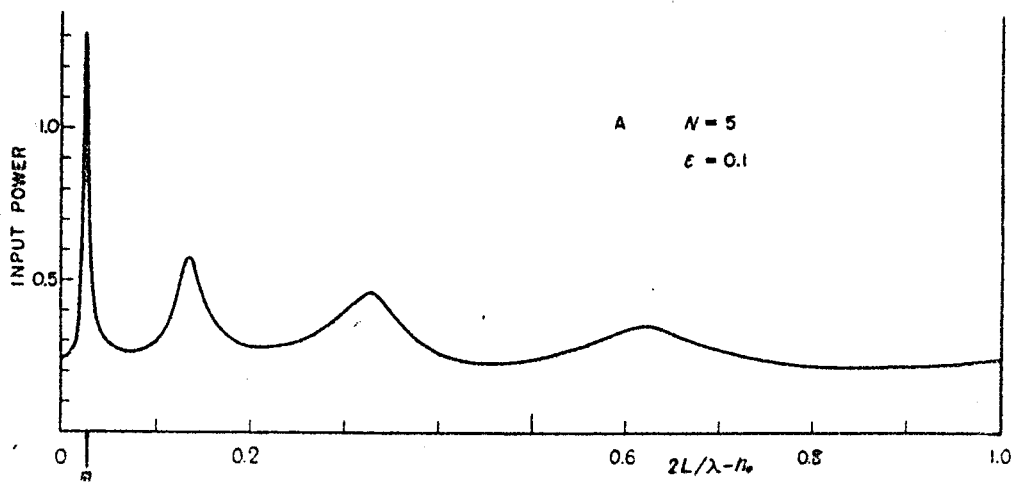
この励振は軸対称であるから、 $\ell = 0$ のモードのみを生じさせる。すなわち (2・28) より

$$\psi_{n\ell} = \frac{2\pi\varepsilon}{\Lambda_n} J_1(\varepsilon \Lambda_n) \delta_{\ell 0} \quad (2 \cdot 60)$$

となる。ただし、ベッセル関数に関する次の積分を使った。

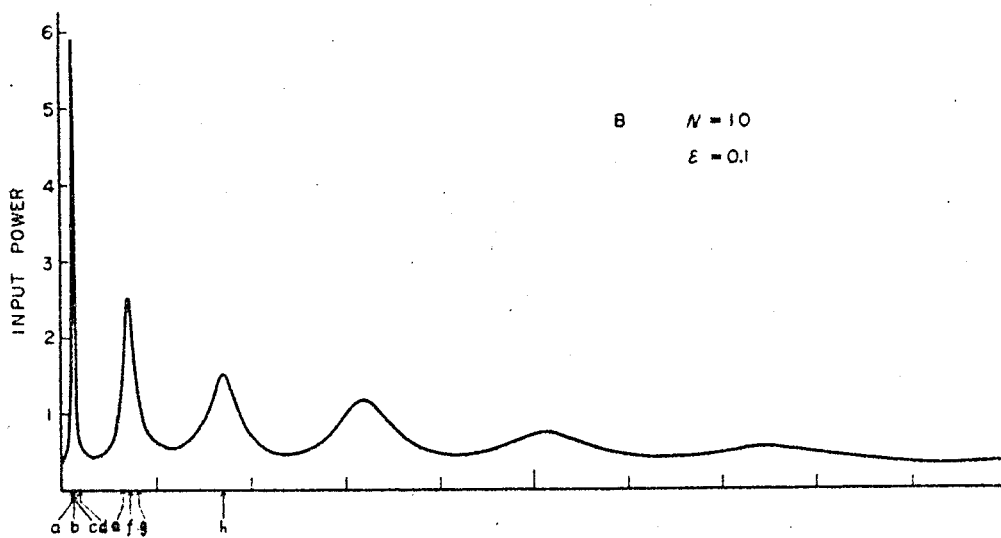
$$\int z^{\ell+1} J_{\ell}(\alpha z) dz = \frac{z^{\ell+1}}{\alpha} \cdot J_{\ell+1}(\alpha z) \quad (2 \cdot 61)$$

2・2図～2・5図において横軸には周波数を、(2・50) の中で示された $2L/\lambda - n_0$ の単位で目盛る。したがって $2L/\lambda$ が1だけ変化すると、全く



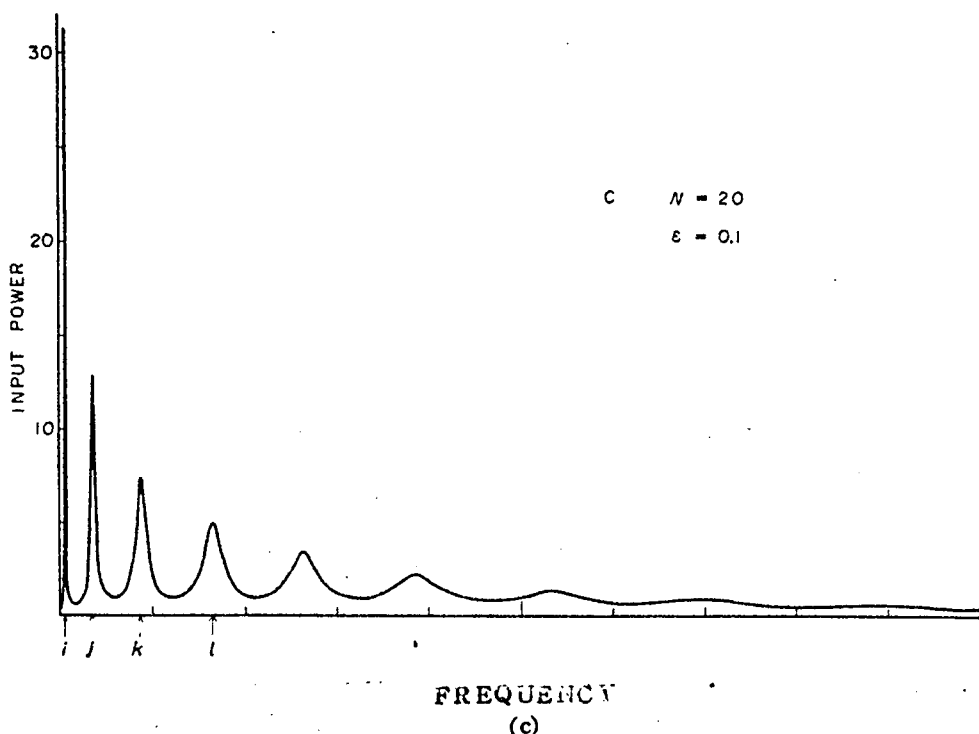
FREQUENCY

2 · 2 ☒ (a)



FREQUENCY

2 · 2 ☒ (b)



2・2図 励振特性 $z=0$ の鏡中心の半径 $0.1a$ の面積内で一様分布した源による励振 (a) $N=5$, (b) $N=10$, (c) $N=20$

同じ図形が繰返される。縦軸には入力パワーを示す。ただし (2・58) の係数を除いて () 内だけを目盛る。

2・2図にフレネル数 N が 5, 10, 20 のときの励振特性を示す。1 周期中に含まれる極大の数は次のようにして求められる。(2・50) より判るように、 $2L/\lambda$ が 1 だけ増加する間に A_{n_0} は $2\pi\sqrt{N}$ だけ増加する。 A_{n_0} が 0 次のベッセル関数の零点と一致する付近の周波数でパワーは極大となるから、フレネル数 N とともに励振特性の 1 周期中に含まれる極大の数は増す。0 次のベッセル関数 $J_0(x)$ の n 番目の零点はほぼ $x = (n - 1/4)\pi$ であるから、1 周期中に含まれる極大の数 n は

$$2\pi\sqrt{N} = (n - \frac{1}{4})\pi \quad (2 \cdot 62)$$

で与えられる。したがって 2・2図に見られるように、極大の数は $N=5$ では 4 個、 $N=10$ では 6 個、 $N=20$ では 9 個である。

励振特性の共振点を示す極大を、同じ角モード ℓ に対しては左から順に (ℓ ,

0), (ℓ , 1), (ℓ , 2), ……モードと名付ける。((2・59) の励振では $\ell=0$ である。) この名称の由来は, Fox, Li⁶⁾ が初めてファブリ・ペロー共振器の自由振動モードを解析したときの命名法によるものである。すなわち m 番目の極大に相当する自由振動モードを Fox, Li が $TEM_{\ell, m-1}$ モードと名付けたためである。^{*} なお m 番目の極大における, 共振器内部の $z = \text{const.}$ の面内の場の分布は, 近似的に円筒導波管の $TM_{\ell m}$ モードの軸方向の電界

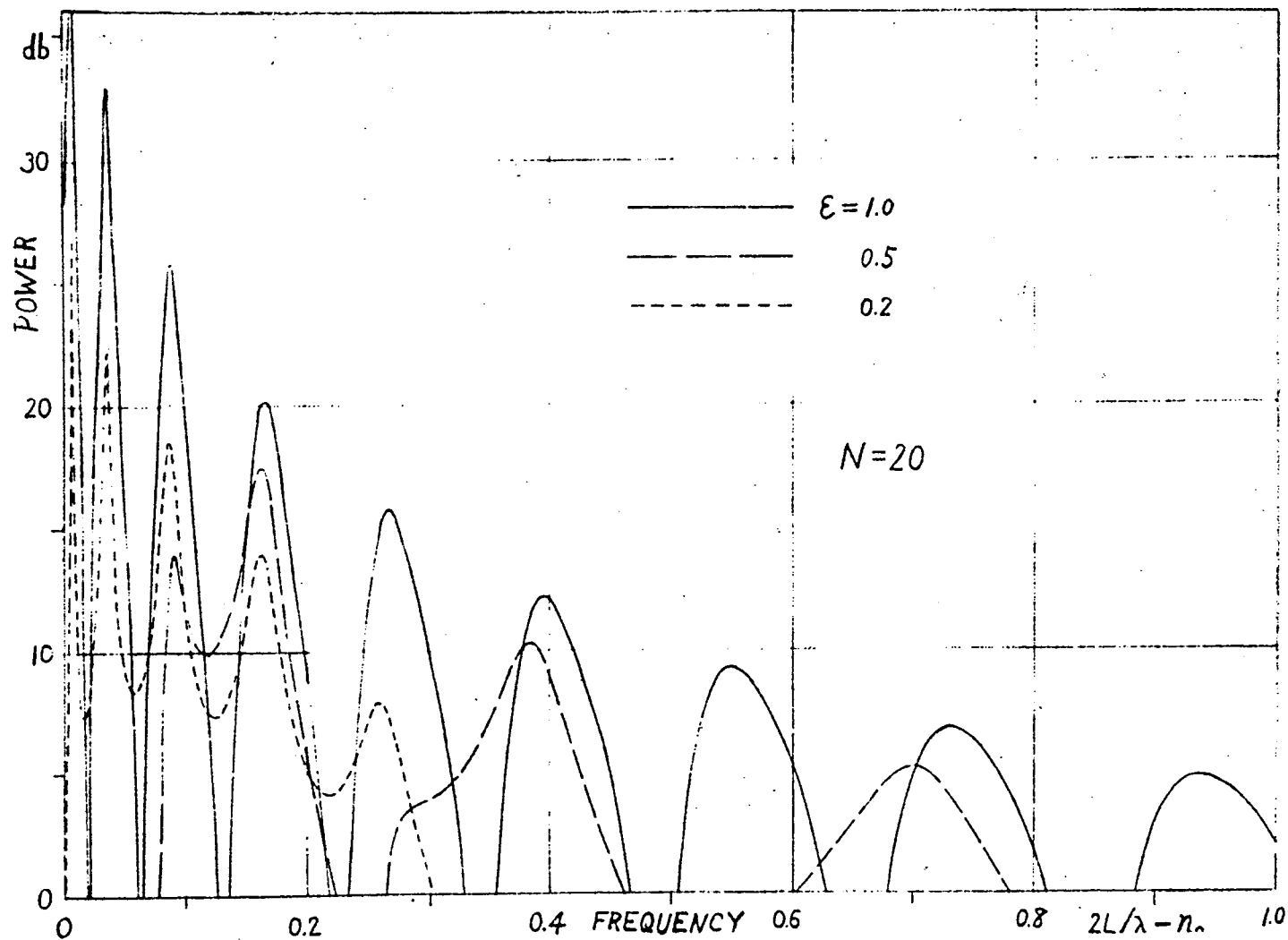
$$E_z = J_{\ell}(\rho_{\ell m} \cdot \frac{r}{a}) \cos \ell \theta, \quad (2 \cdot 63)$$

と同形である。ただし $\rho_{\ell m}$ は $J_{\ell}(\rho) = 0$ の m 番目の根である。円筒導波管のモードの名称はファブリ・ペロー共振器と比べて m に関して 1 つずれている。

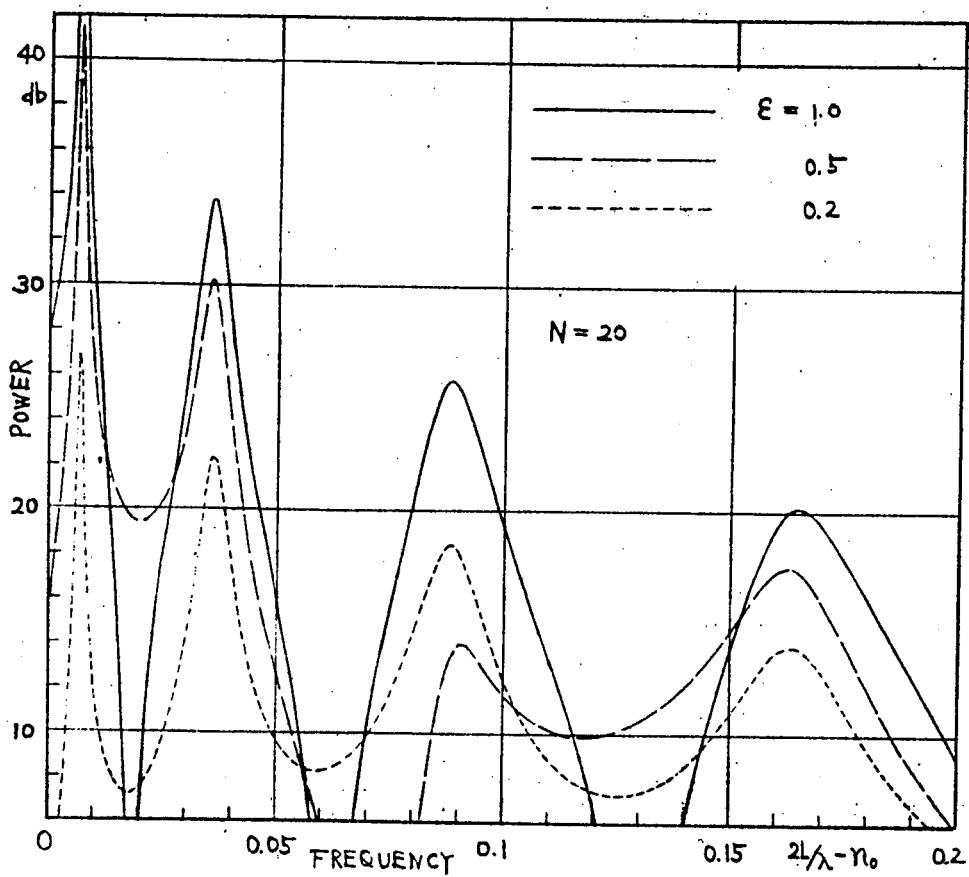
2・2 図の共振点のパワーはフレネル数 N とともに増大する。また, その半値幅より求めた Q 値は自由振動の回折損とよく一致する。このように半値幅より回折損を求める方法は, ファブリ・ペロー共振器の実験で回折損を求めるために採用される。2・2 図の励振パワーの計算においては, n に関しては 20 項程度で十分収束する。 N が増大するとともに, あるいは共振点の周波数に近づくとともに, $n = n_0$ の項の励振への寄与が, 他の n の項の寄与に比べて, より大きくなるために, 収束するための項数はより少なくてすむ。この理由は, 前者に関しては, 励振の強さを表わす (2・60) の中の $J_1(\epsilon A_n) / A_n$ ($n \neq n_0$) が, N とともに振動的に, 小さくなるからである。後者の理由は, $J_1(\epsilon A_{n_0})$ が大きくなるためである。特に励振パワーの計算においては, $n > n_0$ ($A_n^2 < 0$) の項は表面波であるから, これらの項からの寄与は極めて少い。

次に励振源の半径 ϵa が変化すると, 励振特性がどのように影響を受けるかということを, 2・3 図に示す。ここでは, 計算を簡単にするために, $n = n_0$ の項のみによって励振パワーを求める。 $n = n_0$ の項のみで近似計算を行うのは次の 2 つの理由による。前述した如く, 共振点に近い周波数では, 殆んどパワーは $n = n_0$ の項のみによって定まる。また, この方法は, 特性曲線の谷の付近

²⁹⁾
* Fox, Li はその後の論文で, $TEM_{\ell, m-1}$ モードを $TEM_{m-1, \ell}$ モードと名称を変更しているが, ここでは一般に使用されている ($\ell, m-1$) モードの名称を採用する。なお, Fox, Li の使用した TEM は厳密な意味では正しくないが, はゞ平面波に近い波が両鏡間を反射往復するために, 共振器内部の場は近似的に TEM である。

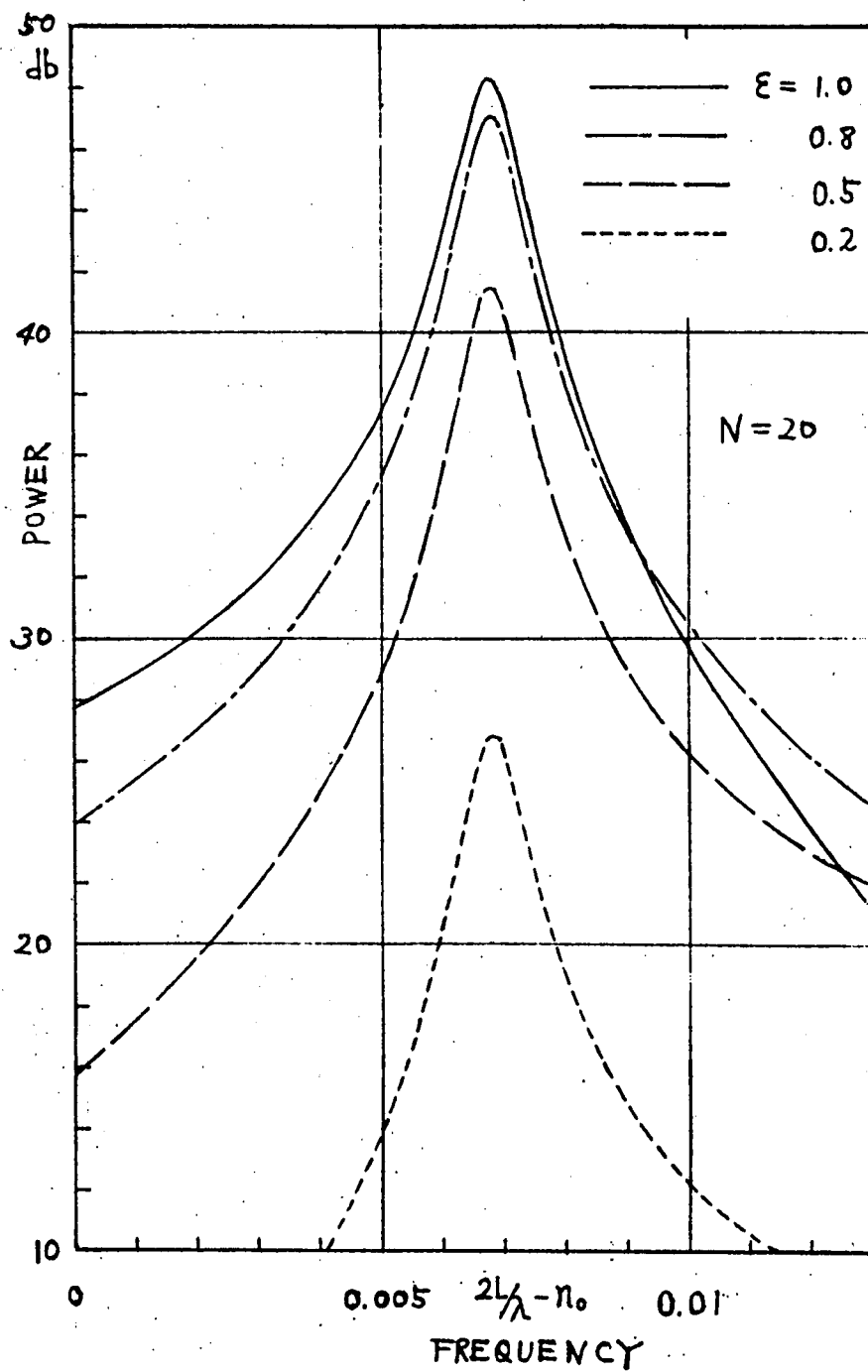


2・8 図 a ϵ をパラメータとする励振特性
 $0 \leq 2L/\lambda - n_0 \leq 1$



2・3図b ϵ をパラメータとする励振特性

$$0 \leq 2L/\lambda - n_0 \leq 0.2$$



2・3図 c ϵ をパラメータとする励振特性
 $0 \leq 2L/\lambda - n_0 \leq 0.016$

では、 $n=n_0$ の項からの寄与が小さくなって他の n の項の寄与が相対的に大きくなり、近似が悪いが、一般に興味のあるのは、谷の部分ではなくて、共振点の付近である。フレネル数 N が大きいほど、この近似は良いので、2・3図では $N=20$ とする。ちなみに、この近似方法で $N=20$ のときの $(0,0)$ モードの共振点では、励振パワーの誤差は2~3%である。なお、2・3図の励振特性では、 $\epsilon \geq 0.2$ としたために、共振モードの違いによる励振パワーの差が大きいので、縦軸はdb目盛で示す。

2・3図aには全周波数範囲の励振特性を示す。この図では、横軸の0~0.2の範囲の共振曲線は、鋭くて、形が不明確であるので、図bにその拡大部分を示す。 $(0,0)$ モードに関しては、図cにさらにその拡大部分を示す。図aを見て判ることは、 $\epsilon = 0.2$ および0.5では非常に励振され難いモードが存在することである。しかし $\epsilon = 1.0$ ではすべてのモードが励振されている。あるモードが励振される強さは、源分布にそのモードの成分がどの程度含まれているかということに大きく依存する。これを数式的に調べる。 $n=n_0$ の項のみで近似しているから、 $(2 \cdot 60)$ を用いて基礎方程式 $(2 \cdot 48)$ は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} & \{ J_0(A) H_0(A) + 8NK_{00} \} a_0 - \{ A J_0(A) H'_0(A) + 8NL_{00} \} b_0 \\ & = - \frac{4\pi\epsilon N}{A} H_0(A) J_1(\epsilon A) , \\ & \{ A J'_0(A) H_0(A) + 8NM_{00} \} a_0 - \{ A^2 J'_0(A) H'_0(A) + 8NN_{00} \} b_0 \\ & = - \frac{4\pi\epsilon N}{A} A H'_0(A) J_1(\epsilon A) \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 64)$$

ただし、 a_n , b_n , K_{nn} , L_{nn} , M_{nn} , N_{nn} において、脚符は、 $n=n_0$ であるので、簡単化のため0と記した。特に A_{n_0} に関しては、これを A と略記した。 $(2 \cdot 64)$ を解いて

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{4\pi\epsilon N}{A \cdot A} \cdot J_1(\epsilon A) \{ A H'_0(A) \{ A J_0(A) H'_0(A) + 8NL_{00} \} \\ & \quad - H_0(A) \{ A^2 J'_0(A) H'_0(A) + 8NN_{00} \} \} , \\ b_0 &= \frac{4\pi\epsilon N}{A \cdot A} \cdot J_1(\epsilon A) \{ A H'_0(A) \{ J_0(A) H_0(A) + 8NK_{00} \} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 65)$$

$$-H_0(A) \{ A J'_0(A) H_0(A) + 8 N M_{00} \}]$$

となる。ただし、 A は(2・64)の左辺の係数のつくる行列式である。

$$\begin{aligned} A \equiv & (8N)^2 \cdot (K_{00} N_{00} - L_{00} M_{00}) + 8N \{ J_0(A) H_0(A) N_{00} \\ & - A J'_0(A) H_0(A) L_{00} - A J_0(A) H'_0(A) M_{00} + A^2 J'_0(A) H'_0(A) K_{00} \} \end{aligned} \quad (2 \cdot 66)$$

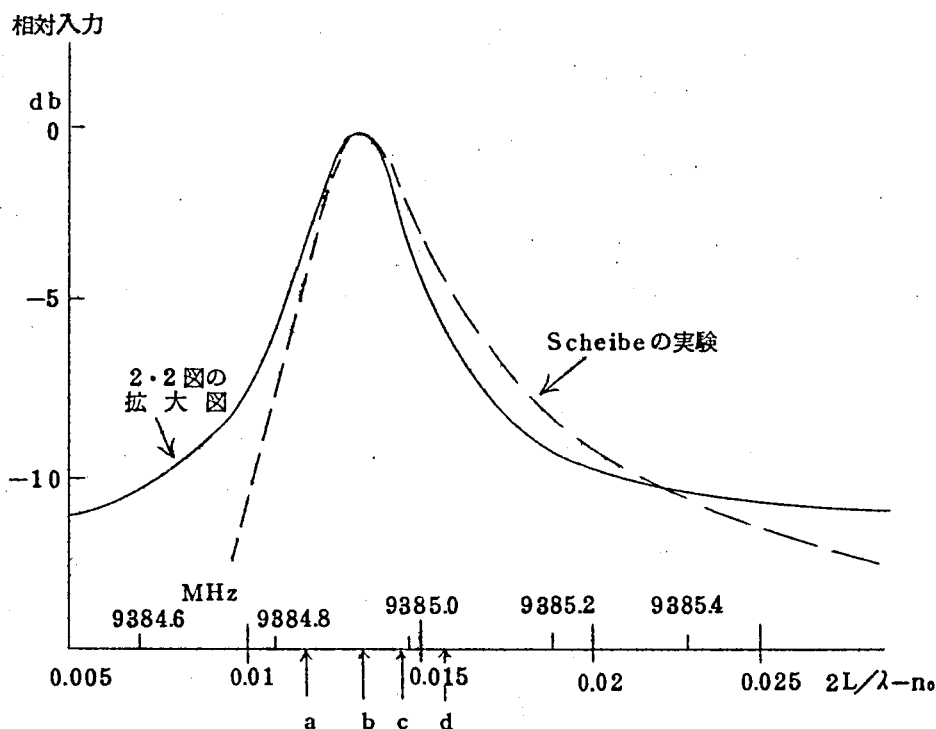
A は A の、したがって周波数の関数である。 A の A 依存性に関しては次節で詳説する。この A の極小点が共振点になる。しかし、(2・65)の分子に $J_1(\varepsilon A)$ を含んでいるために、 $J_1(\varepsilon A)$ の零点が A の極小点の近くになった場合、この共振点は表われないことになる。 A を極小にする A はほぼ $J_0(A)$ の零点付近にあるので、 $\varepsilon = 1.0$ のときは共振点が消えることはなく、すべてのモードが励振される。走査型干渉計を使って、このような平面波によって(0, 0)モードを励振して、(0, 1)モードの励振を押えるときには、例えば次のようにすればよい。 J_0 の2番目の零点が5.52、 J_1 の1番目の零点が3.83であるから、 $\varepsilon = 3.83 / 5.52 = 0.69$ とすればよい。

2・3図cでは、励振半径 εa の増大とともに(0, 0)モードのパワーは大きくなり、かつ共振曲線は頂点に対して左右非対称である。すなわち、 $2L/\lambda$ の増加とともに、急激に立上り、頂点を過ぎて緩かに下がる。この左右非対称性は、(2・66)の A の振舞によって大体定まるのであるが、さらに、

(2・65)の分子の $J_1(\varepsilon A)$ がこれに影響を与え、励振半径 εa の違いによって共振曲線の形に微妙な差を生じさせる。

2・4図にScheibe⁵⁹⁾の実験結果との比較を示す。Scheibeの実験は、両平面鏡の中心に孔をあけて同軸線で結合し、一方より励振して他方で検波したものである。パラメータは、波長 $\lambda = 3.2 \text{ cm}$ 、鏡の半径 $a = 9.45 \text{ cm}$ 、鏡間距離 $L = 30.3 \text{ cm}$ 、フレネル数 $N = 9.4$ であって、波長を変化させて励振曲線を得たものである。2・4図に示すように、これを2・2図の $N = 10$ の(0, 0)モードの曲線と、その頂点を合せて重ねると大体一致している。

* 走査型干渉計は、ファブリ・ペロー共振器の一方の鏡を軸方向に走査させて、半透過鏡を通して入射したレーザー光線に対する共振点を探すようにしたものである。



2・4図 励振特性 Scheibeの実験との比較
(0, 0) モードの共振周波数付近

以上の2・2, 2・3図のグラフでは, 平面波による励振を取扱ったから, $\ell = 0$ のモードしか励振できなかった。次に $\ell \neq 0$ のモードを励振するために, 角度方向に分布をもった次の励振源を考える。

$$\varphi_\ell(r, \theta) = C_\ell \cos \ell \theta \left(\frac{r}{a}\right)^\ell; \quad 0 \leq r \leq \epsilon a \quad (2 \cdot 67)$$

ここで C_ℓ を比較に便宜なように, すべての ℓ に関して励振源の強さが一定となるように定める。すなわち, $\ell = 0$ を基準にとって

$$C_\ell = \begin{cases} 1 & ; \ell = 0 \\ \frac{\sqrt{2(\ell+1)}}{\epsilon^\ell} & ; \ell \neq 0 \end{cases} \quad (2 \cdot 68)$$

と定める。(2・28)の $\psi_{n\ell}$ は, (2・61)を使って

$$\psi_{n\ell} = \frac{\pi \sqrt{2(\ell+1)}}{A_n} \varepsilon J_{\ell+1}(\varepsilon A_n) \quad (2 \cdot 69)$$

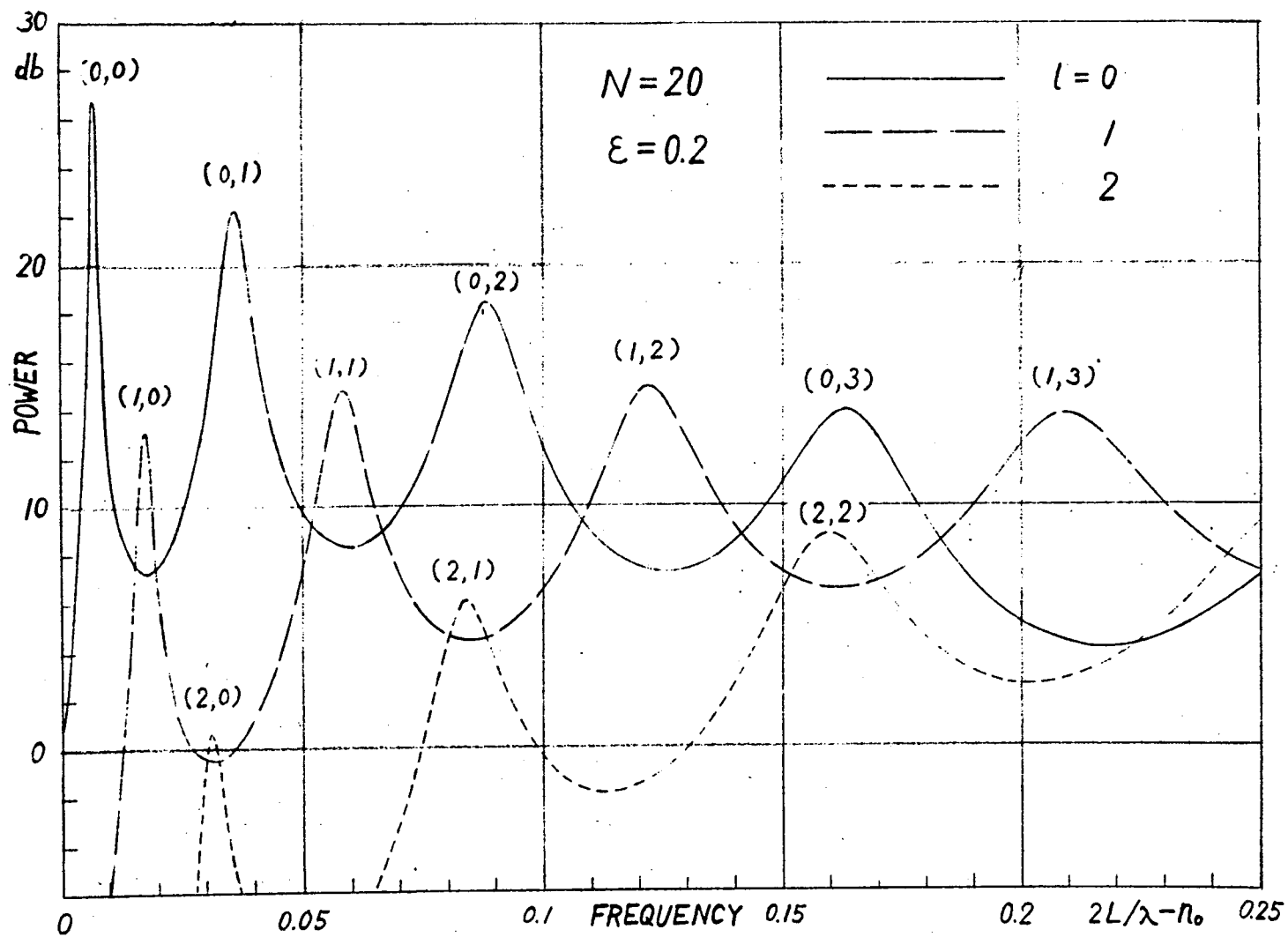
となる。これを基礎方程式に入れて解く。ここでは、 $\ell = 1, 2$ の場合に、 $n = n_0$ の一項のみで近似した結果を2・5図に示す。比較のため $\ell = 0$ の場合も描く。図aは $\varepsilon = 0.2$ 、図bは $\varepsilon = 1.0$ である。各頂点に対応するモード番号を図中に (ℓ, m) で記す。グラフより分ることは、 ε が小さいと ℓ に関して高次のモードは励振され難いことである。これは(2・69)の $J_{\ell+1}(\varepsilon A)$ のためである。特に ε を非常に小さくすると、殆んど $\ell = 0$ のモードしか励振されない。走査型干渉計で、径の小さい絞りを入れて高次モードを消去するのは、この理由による。2・5図では横軸を0～0.2の範囲内で示したが、 $\ell = 1, 2$ のモードを0～1の範囲で示せば、頂点の位置は異なるが、2・3図aのグラフと類似のものが得られる。

(3) 共振器内部の場の分布

源分布 $\varphi_0(r, \theta)$ が与えられると、基礎方程式(2・48)を解いて $a_{n\ell}^{\pm}$ 、 $b_{n\ell}^{\pm}$ を得ることができる。すなわち、(2・19)、(2・20)により、境界面S上の φ および $\partial\varphi/\partial n$ が知られたことになる。これを(2・6)、(2・14)に用いれば、共振器内、外部の場の分布が決定できる。ここでは(2・6)により共振器内部の場を求める。その結果として、次式を得る。

$$\begin{aligned} \varphi_i(r, \theta, z) = & \frac{i\pi a^2}{2L^2} \sum_{n\ell\pm} \varepsilon_{\ell} n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos \ell\theta}{\sin \ell\theta} \right\} \\ & \times \left[H_{\ell}\left(A_n \frac{r}{a}\right) \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r J_{\ell}\left(A_n \frac{r'}{a}\right) \left\{ \frac{\cos \ell\theta'}{\sin \ell\theta'} \right\} \varphi_0(r', \theta') r' dr' d\theta' \right. \\ & + J_{\ell}\left(A_n \frac{r}{a}\right) \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_r^a H_{\ell}\left(A_n \frac{r'}{a}\right) \left\{ \frac{\cos \ell\theta'}{\sin \ell\theta'} \right\} \varphi_0(r', \theta') r' dr' d\theta' \\ & \left. + \frac{1}{2} J_{\ell}\left(A_n \frac{r}{a}\right) \left\{ H_{\ell}(A_n) a_{n\ell}^{\pm} - A_n H'_{\ell}(A_n) b_{n\ell}^{\pm} \right\} \right] \quad (2 \cdot 70) \end{aligned}$$

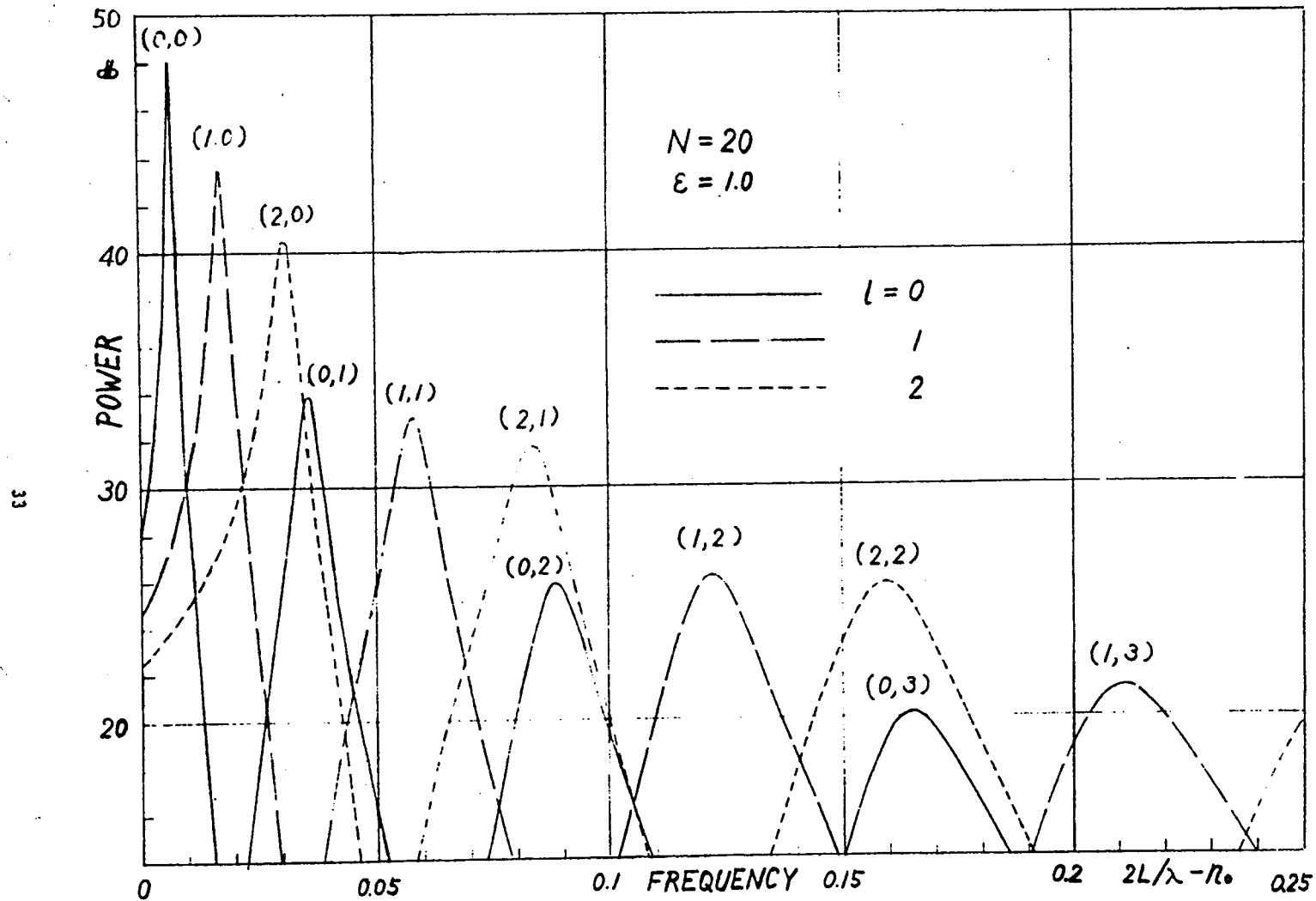
[]内の第1, 2項は源分布により直接作られた場であり、第1項は観測点 (r, θ) の内側($r' < r$)の源分布による寄与で、第2項は外側($r' > r$)のそれによるものである。第3項は開口面Sにより反射されてできた場である。



2・5 図 a

回転非対称の励振源分布による励振特性

 $\epsilon=0.2$



2・5 図b 回転非対称の励振源分布による励振特性 $\epsilon = 1.0$

ここでは (2・59) の平面波による励振を考える。鏡の中央部の半径 ϵa の円内に一様に分布した源の場合である。当然、このときは $\ell = 0$ のモードしか励振されない。このとき (2・70) の鏡面上の積分は実行でき、内部の場の分布は次のように書ける。

$$\varphi(r, \theta, z) = \begin{cases} u_1(r, z) + u_2(r, z) + u_3(r, z) ; & r \leq \epsilon a \\ u_1(r, z) + u_4(r, z) & ; \epsilon a \leq r \leq a \end{cases} \quad (2 \cdot 71)$$

ただし

$$u_1(r, z) = \frac{i\pi}{2} \sum_n \{ H_0(A_n) a_n + A_n H_1(A_n) b_n \} J_0\left(A_n \frac{r}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right), \quad (2 \cdot 72)$$

$$u_2(r, z) = i2\pi^2 N \sum_n \frac{r}{a} \cdot \frac{1}{A_n} \left[H_0\left(A_n \frac{r}{a}\right) J_1\left(A_n \frac{r}{a}\right) - H_1\left(A_n \frac{r}{a}\right) J_0\left(A_n \frac{r}{a}\right) \right] \\ \times \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) = -4\pi N \sum_n \frac{1}{A_n^2} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right), \quad (2 \cdot 73)$$

$$u_3(r, z) = i2\pi^2 N \epsilon \sum_n \frac{1}{A_n} H_1(\epsilon A_n) J_0\left(A_n \frac{r}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right), \quad (2 \cdot 74)$$

$$u_4(r, z) = i2\pi^2 N \epsilon \sum_n \frac{1}{A_n} J_1(\epsilon A_n) H_0\left(A_n \frac{r}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right), \quad (2 \cdot 75)$$

である。(2・73) の u_2 の変形には次の Lommel の公式を使った。

$$J_\ell(A) H'_\ell(A) - J'_\ell(A) H_\ell(A) = \frac{2i}{\pi A} \quad (2 \cdot 76)$$

(2・73) ~ (2・75) の u_2, u_3, u_4 は、源分布によって直接に励振された波を表している。 $z \rightarrow 0$ のとき、 $r \leq \epsilon a$ において $\varphi \rightarrow \varphi_0 = 1$ になることは、(2・6) の第1項の積分におけるグリーン関数の特異性によって保証されている。このことは、(2・71) では次のようにして判る。(2・73) において n に対する近似を行わずに、(2・25) によって N を n についての和の中に戻し、 n について1から ∞ までの和をとれば、 $0 < z < 2L$ におけるフーリエ展開を逆に使って

$$\varphi_2(r, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi \left(\frac{a}{L}\right)^2}{(n\pi \frac{a}{L})^2 - (ka)^2} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) = \frac{\sin k(L-z)}{\sin kL} \quad (2 \cdot 77)$$

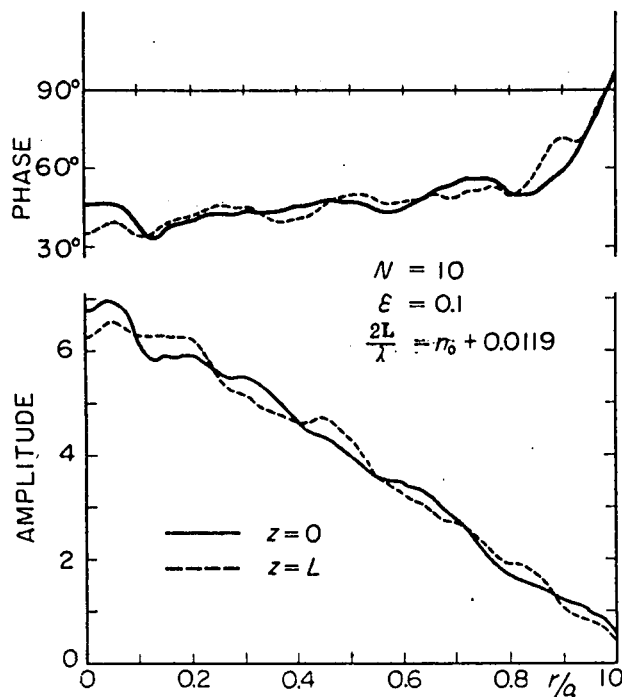
となる。 $z=0$ では成立しないが、 $z \rightarrow 0$ とすれば、 $u_z \rightarrow \varphi_0 = 1$ となることがわかる。その他の u_1 、 u_3 、 u_5 は $z \rightarrow 0$ で0を与える。

次に鏡面上での場の分布を求める。 $z=0$ 、 L の鏡面上では境界条件より $\varphi=0$ であるので、実際の計算は鏡面より $1/4$ 波長離れた位置での場の分布を求める。これは鏡面上での $\partial\varphi/\partial z$ に比例する。以後簡単化のため、これらを鏡面上での場の分布と呼ぶことにする。 $|n-n_0|/n_0 \ll 1$ の範囲の n で、場の分布の級数計算は十分よく収束するから、 $z=0$ 、 L の鏡面上での場の分布は、それぞれ

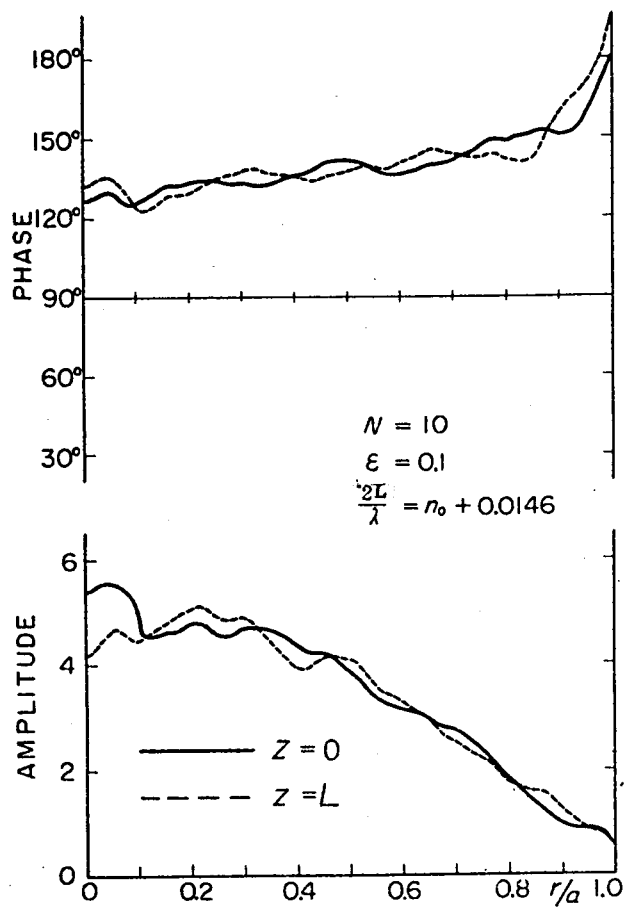
$$\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cong \begin{cases} 1 & ; z = \lambda/4 \\ (-1)^{n-1} & ; z = L - \lambda/4 \end{cases} \quad (2 \cdot 78)$$

とおいたものを用いている。 $z=0$ と L の面上で場の分布が異なるのは、励振が z 軸に関して非対称に行われているためである。

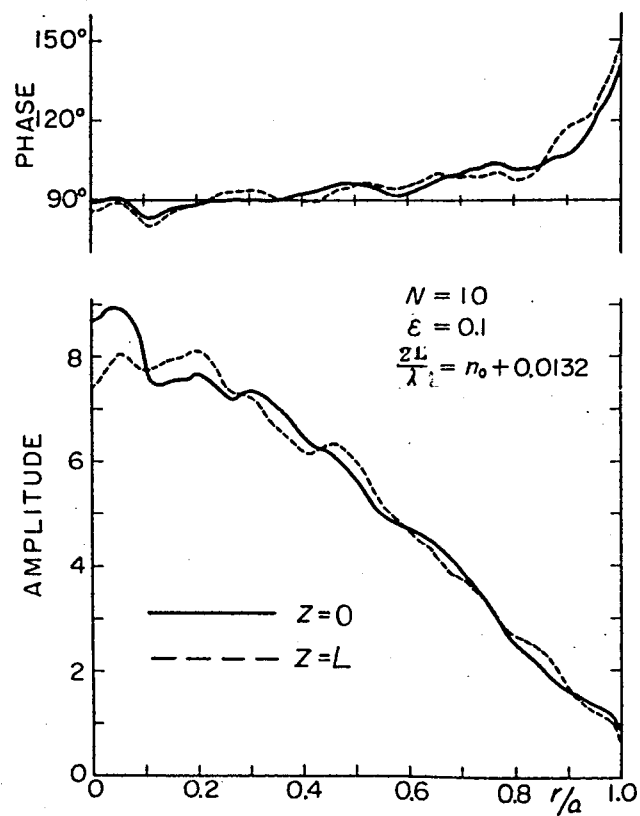
フレネル数 $N=5$ 、 10 、 20 に対して、電子計算機KDC IIで数値計算した、共振点およびその付近の周波数における $z=0$ および L の鏡面上の場の分布を、振幅と位相の形で2・6図a～mに示す。実線は $z=0$ 、点線は $z=L$ の面上における分布である。



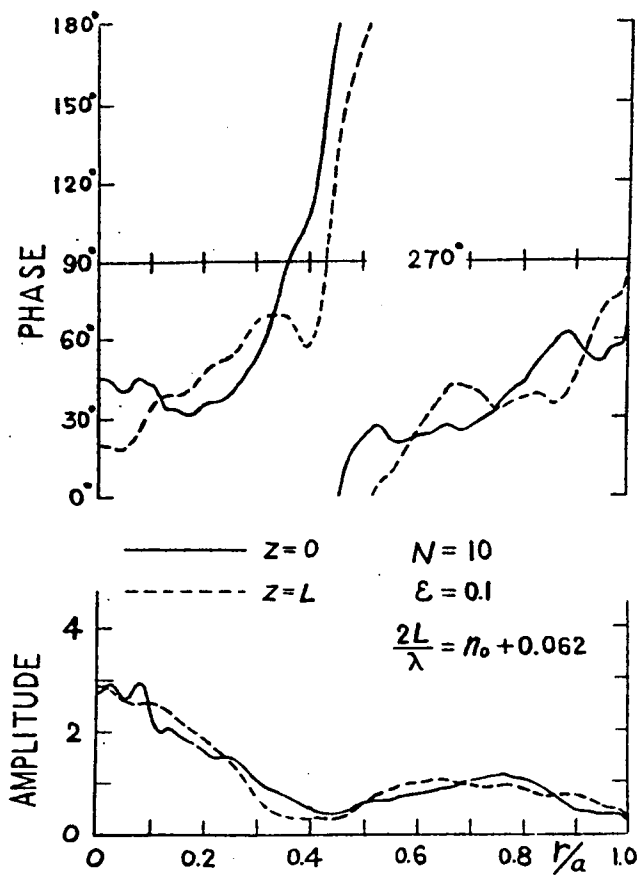
2・6図a 鏡面上における場の分布



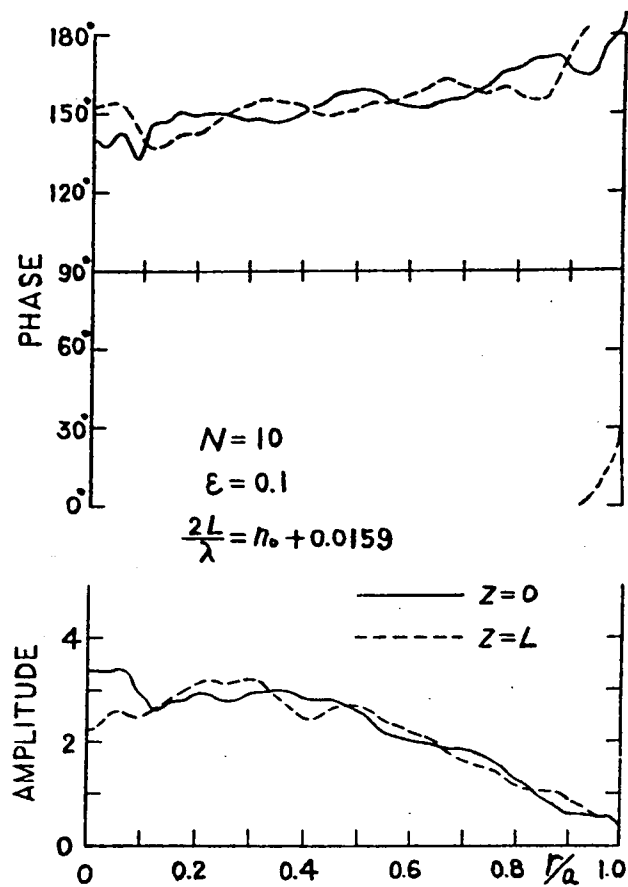
2・6 図c 鏡面上における場の分布



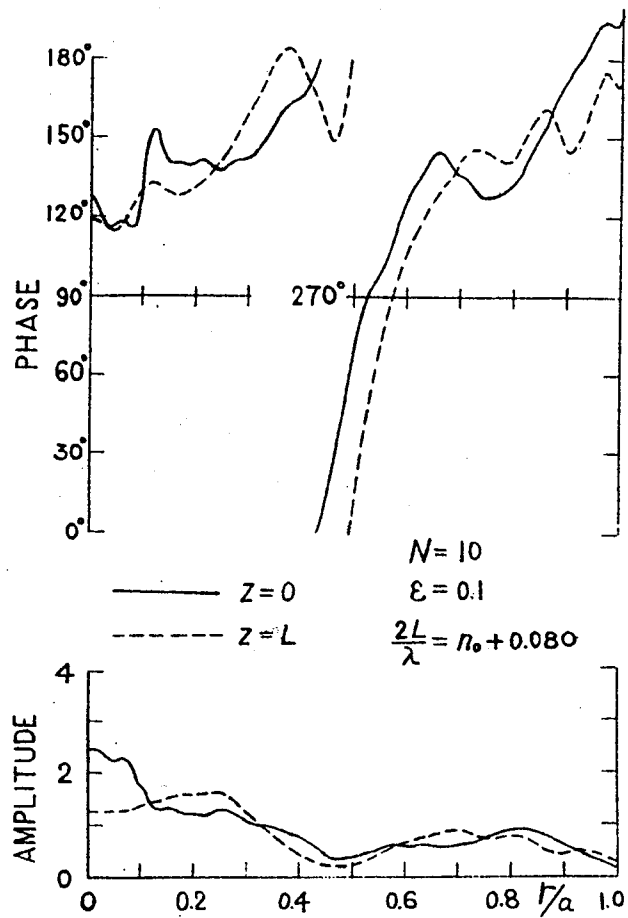
2・6 図b 鏡面上における場の分布



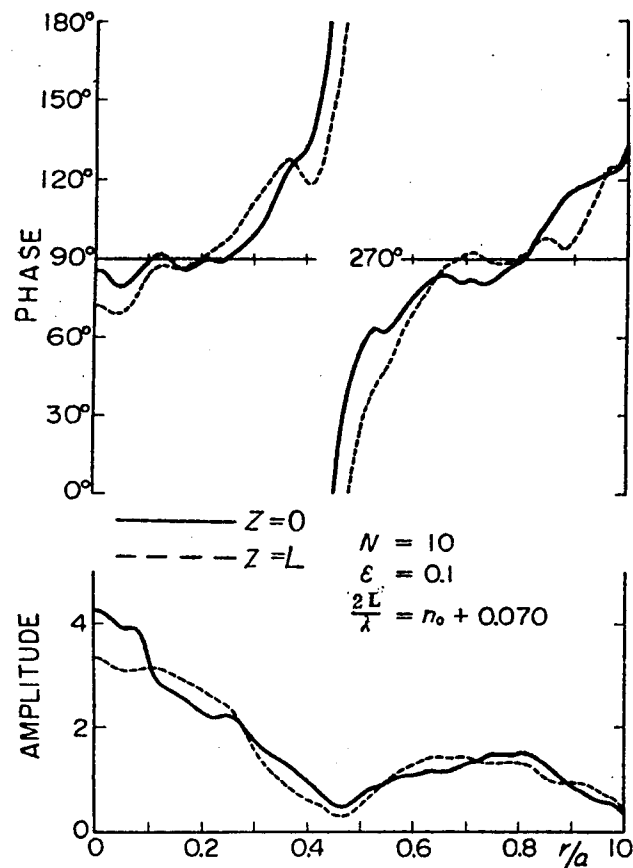
2・6図e 鏡面上における場の分布



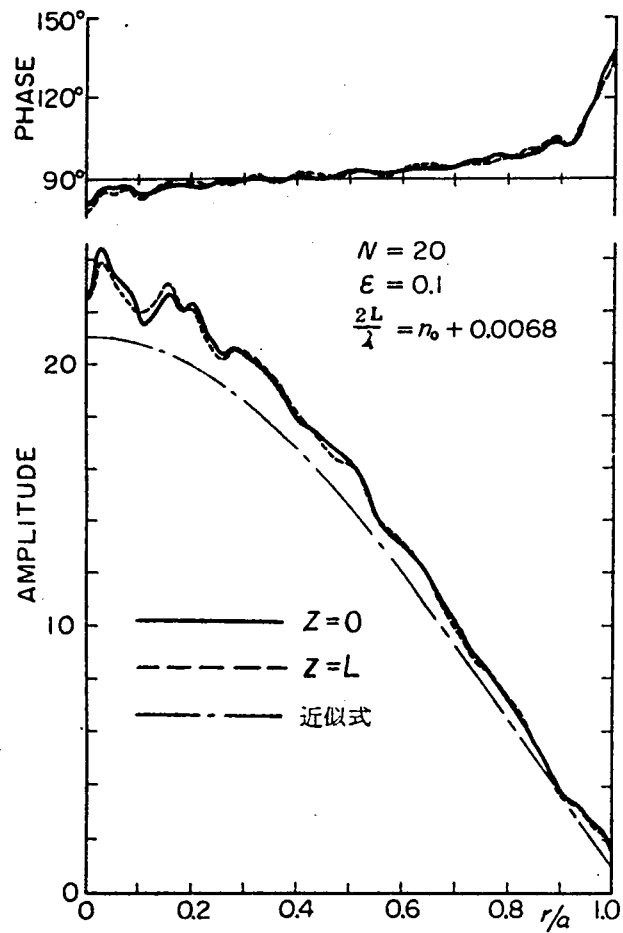
2・6図d 鏡面上における場の分布



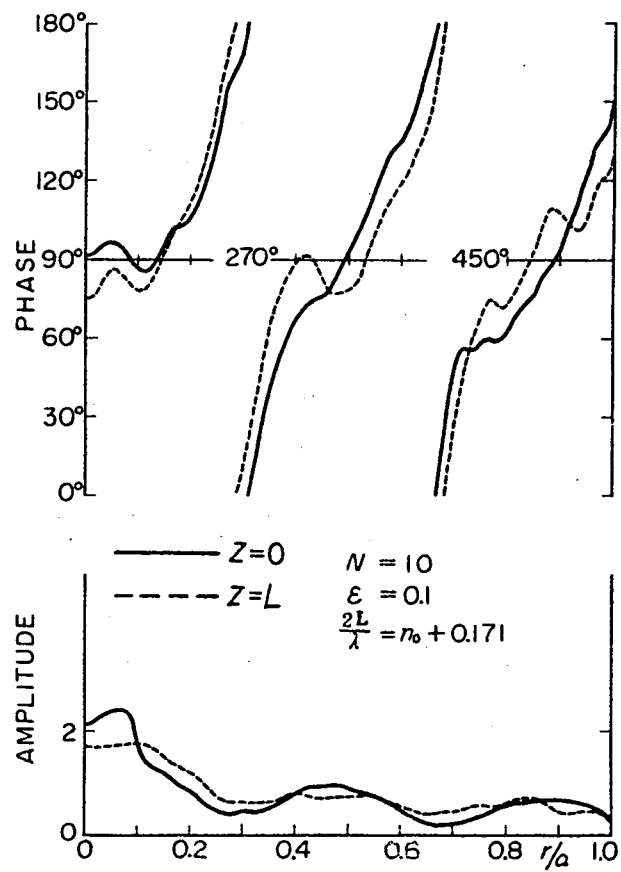
2・6図g 鏡面上における場の分布



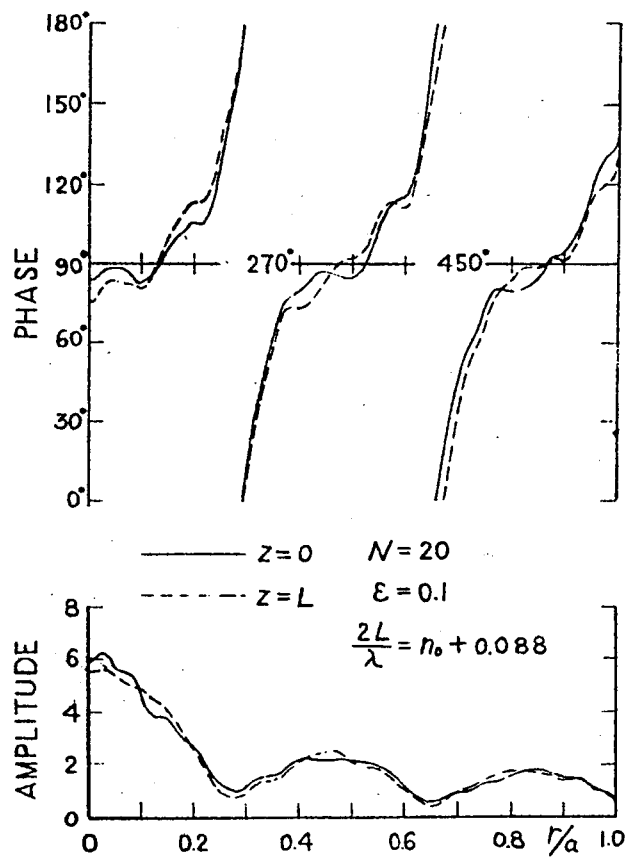
2・6図f 鏡面上における場の分布



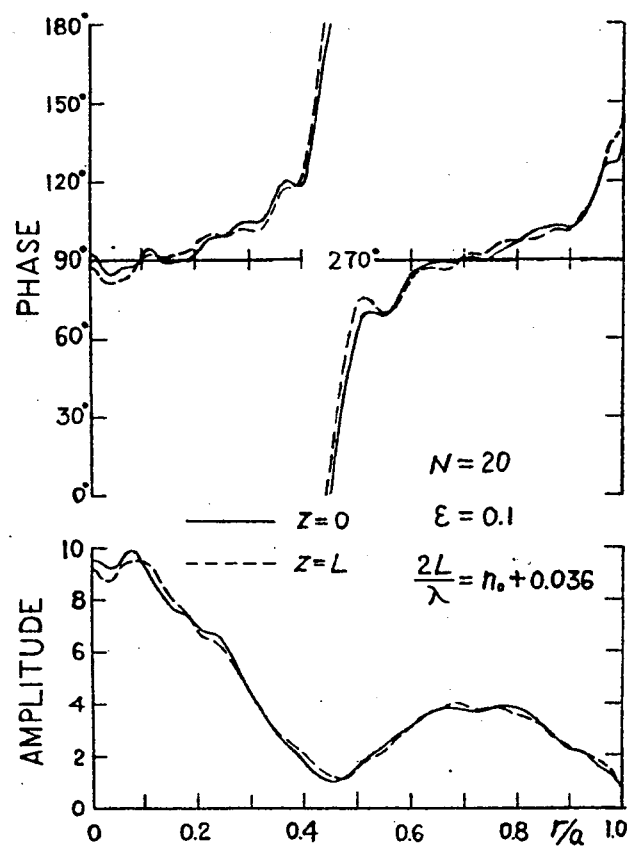
2・6図 i 鏡面上における場の分布



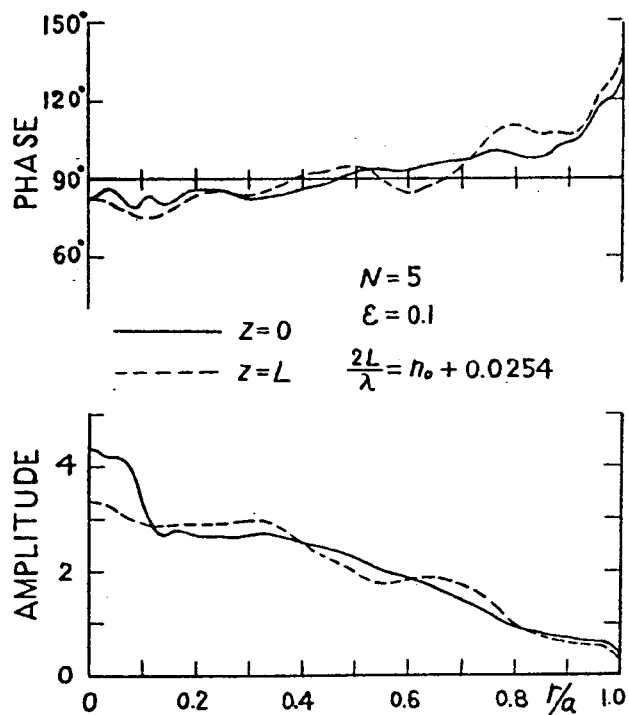
2・6図 h 鏡面上における場の分布



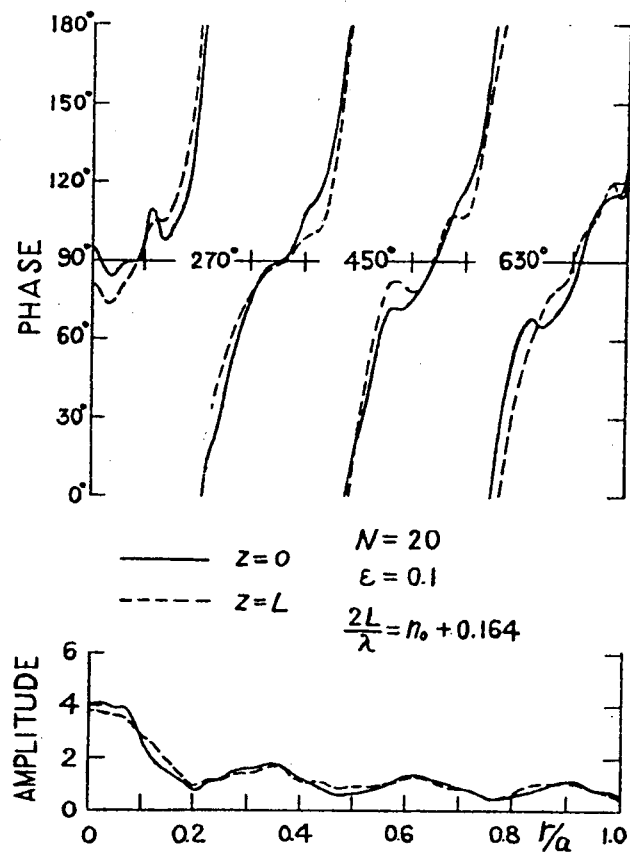
2・6 図k 鏡面上における場の分布



2・6 図j 鏡面上における場の分布



2・6図m 鏡面上における場の分布



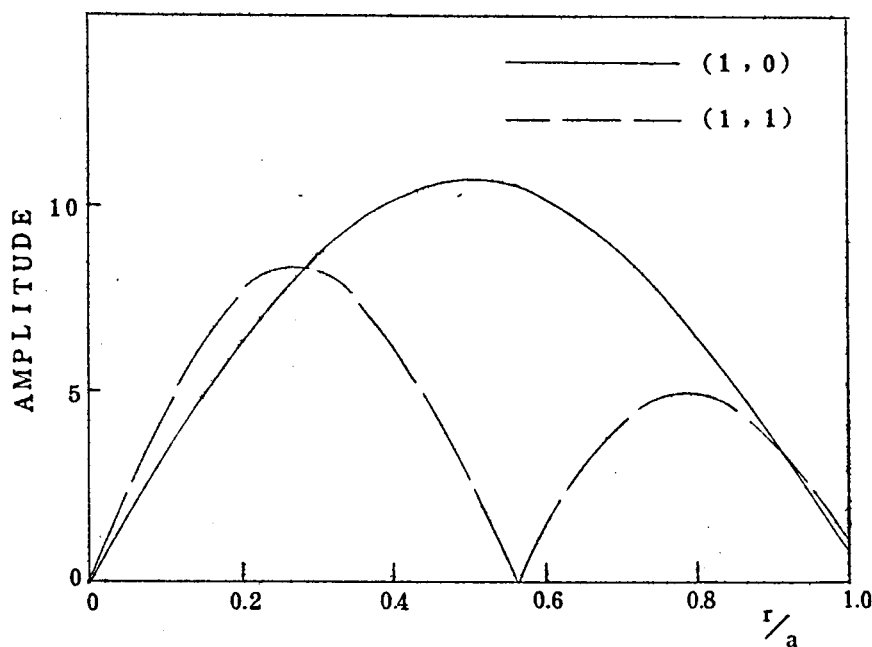
2・6図ℓ 鏡面上における場の分布

励振半径はすべて $\varepsilon = 0.1$ である。2・6 図 a ~ h は、 $N = 10$ の場合を周波数の順に並べたものである。図 a, b, c, d は、 $(0, 0)$ モードの共振周波数付近における場の分布で、b が共振点での、a と c はその両側で入力パワーがピークの $1/2$ になるときの、d は $1/4$ になるときの分布である。図 e, f, g は、 $(0, 1)$ モードの共振点を中心として、その両側でパワーがピークの $1/2$ になる場合であり、h は $(0, 2)$ モードの共振点におけるものである。図 i, j, k, l は、 $N = 20$ のときで、順に $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$ の共振点における分布である。図 m は $N = 5$ の $(0, 0)$ の共振点におけるそれである。これらの場の分布の対応する周波数の位置を、2・2 図および 2・4 図中に、矢印で示す。2・6 図 a ~ m の振幅分布の零点、および対応する位相分布の急変点は、各モードの特徴を示している。

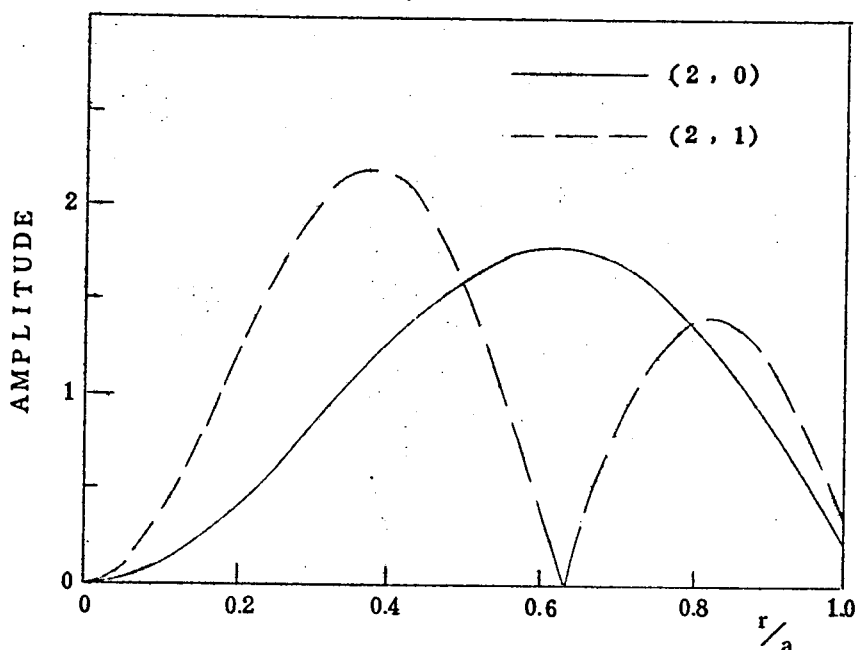
共振点付近における場の分布は、(2・72) の u_1 中の $n = n_0$ の項によって、その概形が定まる。その例を、 $N = 20$ の $(0, 0)$ モードの共振点における振幅分布を示す 2・6 図 i に、鎖線で記入して、正確な分布と比較する。パワー同様、 N の増加とともに、場の分布は n に関して収束がよくなる。数値計算に用いた n に関する項数は、 $N = 5, 10$ のとき n_0 を中心として 80 項であり、 $N = 20$ のとき 40 項である。入力パワーの計算のときは、 $\beta_n < 0$ となる n からの寄与は小さくて無視できたが、場の分布の計算においては、その寄与は $r = \varepsilon a$ の付近で無視できない。2・6 図の細かいリップルは (2・72) の u_1 中の $n \neq n_0$ の項による寄与で、その形は N に特有のものである。例えば図 b, i, m の $(0, 0)$ モードのリップルは、小倉、吉田、池上および Fox, Li⁴⁾ の自由振動モードのそれらとよく似た形である。リップルが N に特有な理由は、先述した如く、 N が一方の鏡の中心に光源をおいたときの他方の鏡に含まれるフレネル帯の数であることによる。したがってこのリップルは N の増加とともに細くなる。 $z = 0$ と L の鏡面上の場の分布の差は $n - n_0 = \text{奇数の } n$ の項の影響である。 N が大きいほど両者の差は小さい。励振源を含む $z = 0$ の面での場の分布の n に関する収束は比較的が悪いが、励振源のない $z = L$ の面でのそれは前者に比べてよい。2・6 図のグラフから判るように、共振点ではすべて鏡の中心における位相はほぼ 90° である。これは、 $z = L$ の鏡からの反射波と励振波が同位相で強めあっていることを示している。 $z = 0$ の面上の

振幅分布において、 $r \leq \epsilon a$ の鏡中心でおよそ 1 だけ盛り上った形は源分布によるものである。すなわち (2・73) の u_2 、(2・74) の u_3 による寄与である。共振点付近以外の周波数における場の分布は、全体の振幅は小さく、大きな振動は殆んどなく、小さいリップルの連続という形である。重要でないと考えられるので図示しない。

角モード番号 ℓ が 0 でない場合、すなわち回転対称でない分布をもった励振の場合の場の分布を考える。分布の詳しい形は求めないが、参考までに、(2・67) の源分布による励振の、共振周波数における、振幅分布の概略形を示す。2・7 図 a は $\ell=1$ 、b は $\ell=2$ の場合である。これらの図は、(2・70) の [] 内最後の項中の $n=n_0$ のみを取り出して得たものである。したがってベッセル関数の形を適当に切ったものである。これらがほぼ振幅分布の概略形を示すことは、 $\ell=0$ のときの 2・6 図 i での、鎖線と実線、点線との比較で明らかである。



2・7 図 a 共振周波数における振幅分布の概略図
 $\ell=1$



2・7図 b 共振周波数における振幅分布の概略図
 $\ell=2$

§ 2・4 簡 略 解

入力パワーと周波数の関係を示す励振特性において、普通重要なのは、共振の位置、大きさ、半値幅等共振点付近の様子である。前節において、励振特性は共振点付近で $n=n_0$ の項のみで近似よく解析できることを述べた。本節ではさらにこれを検討し、共振点付近での振舞を簡単な式の形に導く。この簡略解はフレネル数が大きくなるとともに近似がよくなる。

$n=n_0$ の項のみで近似するから、基礎方程式 (2・48) より n_0 の項のみをとり出した

$$\left. \begin{aligned} & [J_\ell(A) H_\ell(A) + 8NK_{00}] a_0 - [AJ'_\ell(A) H'_\ell(A) + 8NL_{00}] b_0 \\ & = -2\epsilon_\ell N H_\ell(A) \psi_0 \\ & [AJ'_\ell(A) H_\ell(A) + 8NM_{00}] a_0 - [A^2 J'_\ell(A) H'_\ell(A) + 8NN_{00}] b_0 \\ & = -2\epsilon_\ell N A H'_\ell(A) \psi_0 \end{aligned} \right\} (2.79)$$

より出発し、その解

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 2\varepsilon_\ell N \psi_0 \left[A H'_\ell(A) \{ A J_\ell(A) H'_\ell(A) + 8 N L_{00} \} \right. \\ &\quad \left. - H_\ell(A) \{ A^2 J'_\ell(A) H'_\ell(A) + 8 N N_{00} \} \right] / A \\ b_0 &= 2\varepsilon_\ell N \psi_0 \left[A H'_\ell(A) \{ J_\ell(A) H_\ell(A) + 8 N K_{00} \} \right. \\ &\quad \left. - H_\ell(A) \{ A J'_\ell(A) H_\ell(A) + 8 N M_{00} \} \right] / A \end{aligned} \right\} (2 \cdot 80)$$

を簡単化してゆく。ただし A は (2・79) の左辺の係数のつくる行列式、

$$A = (8N)^2 (K_{00} N_{00} - L_{00} M_{00}) + 8N \{ J_\ell(A) H_\ell(A) N_{00} - A J'_\ell(A) H_\ell(A) L_{00} - A J_\ell(A) H'_\ell(A) M_{00} + A^2 J'_\ell(A) H'_\ell(A) K_{00} \} \quad (2 \cdot 81)$$

である。前節の (2・64) ~ (2・66) は上式の特珠な場合、すなわち平面波励振によって $\ell = 0$ のモードのみを取扱ったものである。なお上式でも前節と同じ略記号を用いている。すなわち A_{n_0} では脚符 n_0 を省略してこれを A と記し、他の記号では脚符 n_0 を単に 0 と記す。方程式の根 a_0, b_0 の周波数依存性したがって A 依存性に関して、もっとも支配的なのは (2・81) で与えられる分母の A である。以下 A の A 依存性を調べる。そのために、(2・81) の右辺に含まれる行列要素 $K_{00}, L_{00}, M_{00}, N_{00}$ を、(A2・28) ~ (A2・31) のベキ展開を用いて書直す。ここでの仮定は、 $\alpha^2 A^2 \ll 1$ である。 α は (2・35) より $\alpha^2 = 1/4\pi N$ 、したがってフレネル数 N を 10 とすれば、 $A^2 \ll 100$ となるから、ベッセル関数の零点より判断して、(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1) モードの共振点付近を解析できる。 N が大きくなると近似がよくなるのは、上記の $\alpha^2 A^2 \ll 1$ の条件を満たすとともに、 $n = n_0$ の項のみによる近似もよくなるためである。(2・81) の A を A と α で表示すると次式となる。

$$A \cong \left(\frac{2}{\pi \alpha^2} \right) \left[\left(\frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) \alpha^2 + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} (1+i) \alpha J_\ell(A) H_\ell(A) \right] \quad (2 \cdot 82)$$

上記の変形の際、円筒関数に関する (2・76) の Lommel の公式を使った。ここで円筒関数の次の漸近形

$$J_\ell(A) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi A}} \cos(A - \beta) \quad , \quad (2 \cdot 83)$$

$$H_\ell(A) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi A}} e^{i(A - \beta)} \quad (2 \cdot 84)$$

ただし

$$\beta = \frac{2\ell+1}{4} \pi \quad (2 \cdot 85)$$

が円筒関数の変数かなり小さいときでも概形を表示することを利用すると、
(2・82)は

$$A = C_1 + C_2 \cdot \frac{(1+i)}{2A} [e^{i2(A-\beta)} + 1] \quad (2 \cdot 86)$$

となる。ただし、 C_1, C_2 は次式で与えられる実数である。

$$C_1 = \left(\frac{2}{\pi \alpha^2}\right) \left(\frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi}\right) \alpha^2, \quad (2 \cdot 87)$$

$$C_2 = \left(\frac{2}{\pi \alpha^2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \alpha \quad (2 \cdot 88)$$

A の実数部を x 、虚数部を y とおくと、(2・86)より

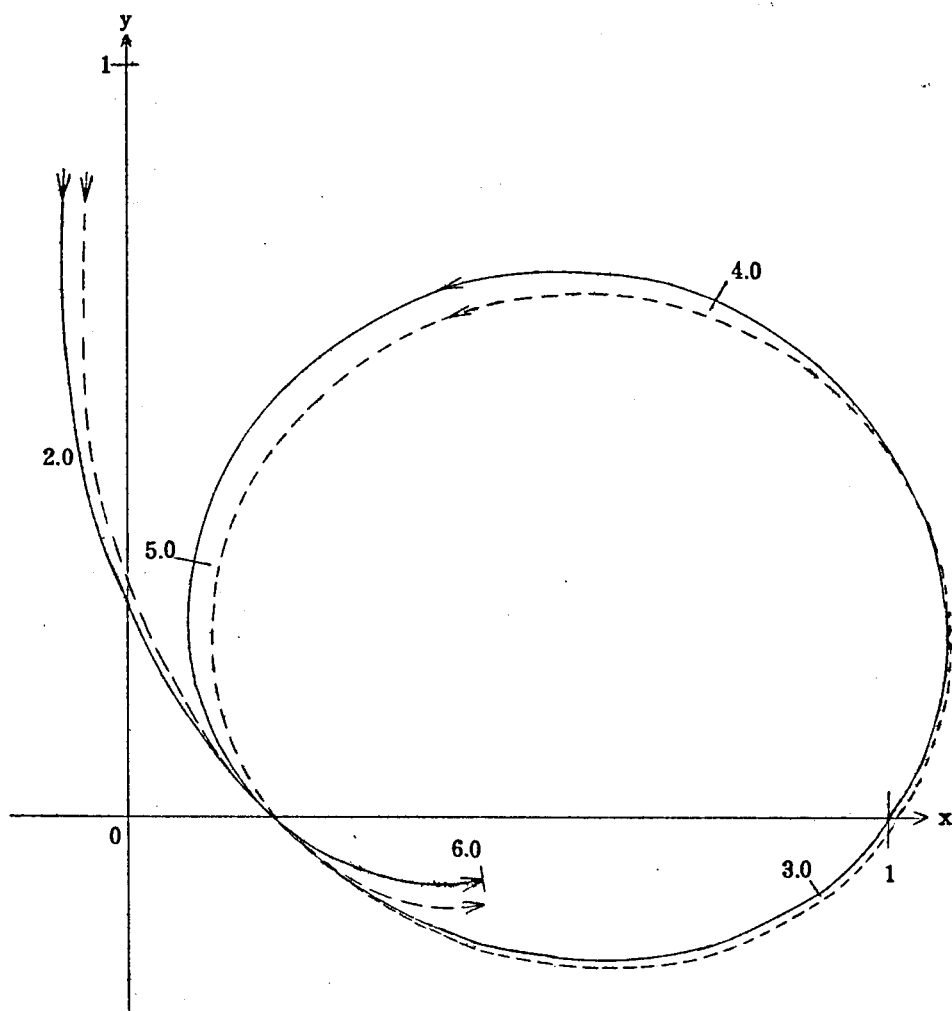
$$x = C_1 + \frac{C_2}{2A} [\cos 2(A-\beta) + 1 - \sin 2(A-\beta)], \quad (2 \cdot 89)$$

$$y = \frac{C_2}{2A} [\cos 2(A-\beta) + 1 + \sin 2(A-\beta)] \quad (2 \cdot 90)$$

となる。ここで A の関数としての x, y の変化を考える。上式中の三角関数の部分は A とともに急激に変化するが、 $1/A$ の変化は緩かであるので、上二式より三角関数の部分のみを消去して $A = x + iy$ の軌跡を求める。(2・89)、(2・90)より

$$\left(x - C_1 - \frac{C_2}{2A}\right)^2 + \left(y - \frac{C_2}{2A}\right)^2 = \left(\frac{C_2}{\sqrt{2}A}\right)^2 \quad (2 \cdot 91)$$

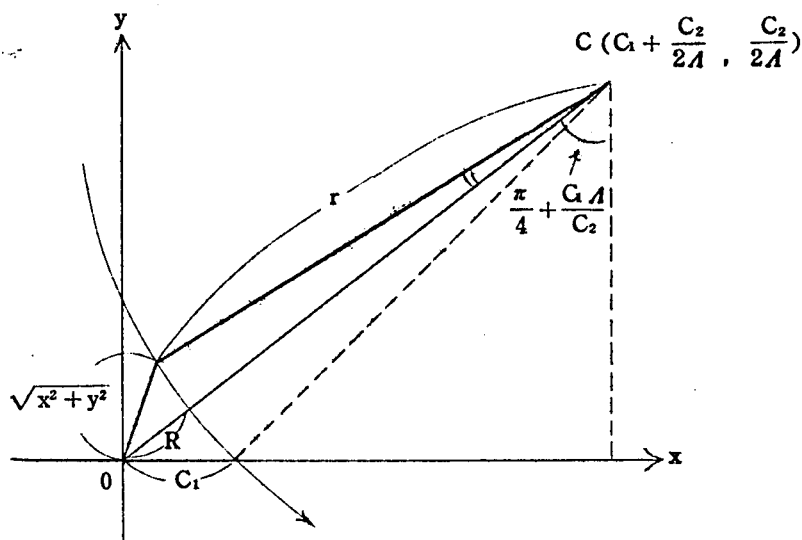
を得る。上式で分母の A が一定ならば、 x, y は円を表わす。 A を考慮すると、 A の増加とともに次第に半径が小さくなってゆく渦巻型である。 $N=20, \ell=0$ の場合に(2・89)、(2・90)を計算して、複素平面上に描いたのが2・8図である。2・8図には(2・81)により正確に計算した A も点線で書き加えた。両曲線の比較より(2・86)の近似のよいことがわかる。図中に記入した数字は A の値である。



2・8図 $N=20$, $l=0$ のときの Δ の軌跡

曲線中に記入した数字は λ の値

ここで共振点を与える $|A|^2 \equiv x^2 + y^2$ の極小値と、その付近での λ 依存性を調べる。 $1/\lambda$ は極小値の付近では一定と見なす。 $\alpha \ll 1$ であるから、 $C_1 \ll C_2$ である。 $C_1=0$ であれば、(2・91) は中心が $(C_2/2\lambda, C_2/2\lambda)$ で、原点を通る円である。(2・91) はこの円を微小距離 C_1 だけ右へ平行移動し



2・9図 $\Delta = x + iy$ の軌跡

たものであるから (2・9 図), 原点から円上への最短距離 $(x^2 + y^2)_{\min}$ は, 近似的に, 原点から円の中心までの距離と円の半径との差で与えられる。

$$(x^2 + y^2)_{\min} \cong \sqrt{\left(C_1 + \frac{C_2}{2A}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{2A}\right)^2} - \sqrt{\frac{C_1}{2}} A \cong \frac{C_1}{\sqrt{2}} \quad (2 \cdot 92)$$

次に, $x^2 + y^2$ の極小値の付近での A に対する依存性を考える。2・9 図において, $\theta \ll 1$, $r \ll R$ とすると

$$x^2 + y^2 = r^2 + (r+R)^2 - 2r(r+R) \cos \theta \cong R^2 + r^2 \theta^2 \quad (2 \cdot 93)$$

となる。ここで

$$R = C_1 / \sqrt{2} \quad (2 \cdot 94)$$

$$r = C_2 / \sqrt{2} A \quad (2 \cdot 95)$$

である。また三角関数消去の過程より分るように

$$\theta = 2(Ar - A) \quad (2 \cdot 96)$$

である。ただし A_r は共振点を示すもので

$$A_r = A_{\ell m} - \frac{C_1}{2C_2} A_{\ell m} \quad (2 \cdot 97)$$

で与えられる。 $A_{\ell m}$ は ℓ 次のベッセル関数の $m+1$ 番目の零点であり、最後の項は $C_1 \neq 0$ であるための補正である。(2・97)の導出は次のようにする。 N が無大を意味する $C_1=0$ のとき、 x^2+y^2 が極小になるのは $A_r = A_{\ell m}$ のときである。これは円の中心と原点を結ぶ直線の傾斜角が $\pi/4$ であることに対応している。 $C_1 \neq 0$ のときは、2・9図のように円が右へ $C_1 A$ だけ平行移動しているから、円の中心と原点を結ぶ直線の傾斜角は $\pi/4 - C_1 A / C_2$ となる。したがって x^2+y^2 を極小にする A は(2・97)で与えられる。

(2・94)～(2・96)により、(2・93)は次のようになる。

$$|A|^2 \equiv x^2 + y^2 = \frac{C_1^2}{2} + \frac{2C_2^2}{A^2} (A - A_r)^2$$

$$= \left(\frac{2}{\pi \alpha^2}\right)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right)^2 \alpha^4 + \frac{4\alpha^2}{\pi^3 A^2} (A - A_r)^2 \right] \quad (2 \cdot 98)$$

次に、(2・80)の a_0 、 b_0 の A に対する依存性を調べる。(2・77)のLommelの式、および(A2・28)～(A2・31)の行列要素のべき展開を使うと、 a_0 、 b_0 は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &\cong \frac{-\varepsilon_\ell \psi_0}{2\pi^2 \alpha^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1+i) H_\ell(A) / A \\ b_0 &\cong \frac{i \varepsilon_\ell \psi_0}{2\pi^2 \alpha^2} H_\ell(A) / A \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 99)$$

したがって開口面より輻射されるパワーは次式で表わされる。

$$P = \frac{\pi L}{k} I_m \left(\frac{a_0 b_0^*}{\varepsilon_\ell} \right) = \frac{1}{4\pi^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{L}{k} \cdot \frac{\varepsilon_\ell |\psi_0|^2 |H_\ell(A)|^2}{\alpha^5 |A|^2}$$

$$= \frac{\pi}{32} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{L}{k} \cdot \frac{\varepsilon_\ell A |\psi_0|^2}{\alpha^3 \left[2\pi \left(\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{8} \right)^2 A^2 \alpha^2 + (A - A_r)^2 \right]} \quad (2 \cdot 100)$$

最後の変形の際、ハンケル関数には(2・84)の漸近形を用いた。 ψ_0 は、例えば(2・69)のように、 A に対して緩かに変化する関数である。ここで(2・8)の A の定義式により、 A を周波数に書き換える。

$$A^2 \equiv (ka)^2 - \left(\frac{n_0 \pi a}{L} \right)^2 \quad (2 \cdot 101)$$

A_r に対する共振周波数 n_r を次式で定義する。

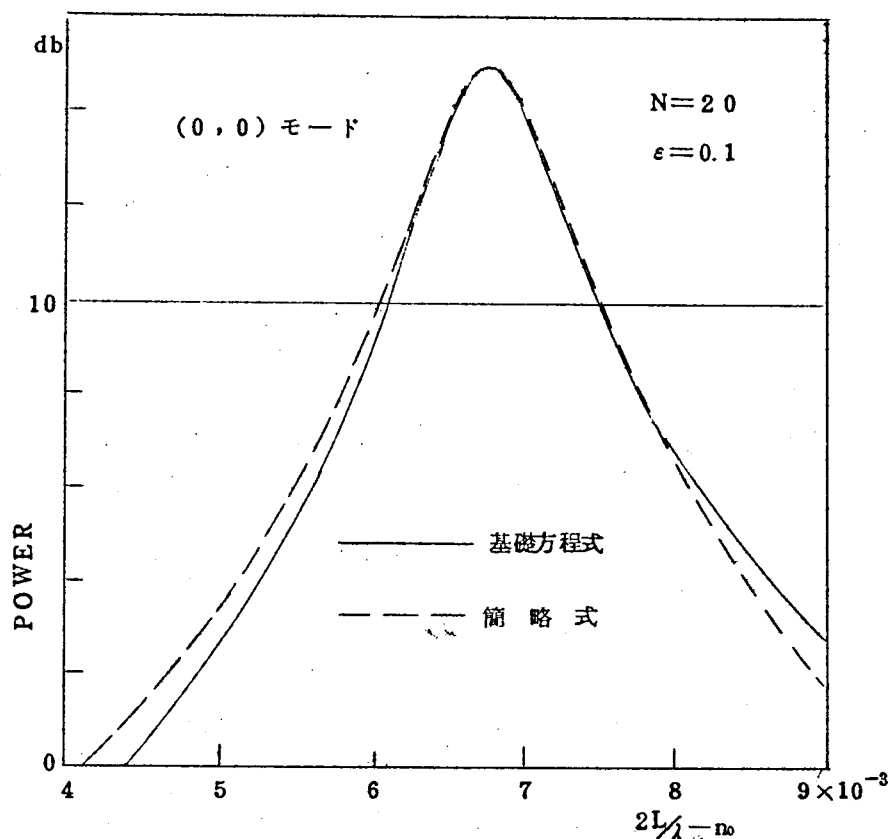
$$A_r^2 \equiv \left(\frac{n_r \pi a}{L} \right)^2 - \left(\frac{n_0 \pi a}{L} \right)^2 \quad (2 \cdot 102)$$

n_r は n_0 と異なり整数でないことに注意する。(2・101) , (2・102) を辺々相減じて, $|A - A_r| / A_r \ll 1$ の条件を使うと

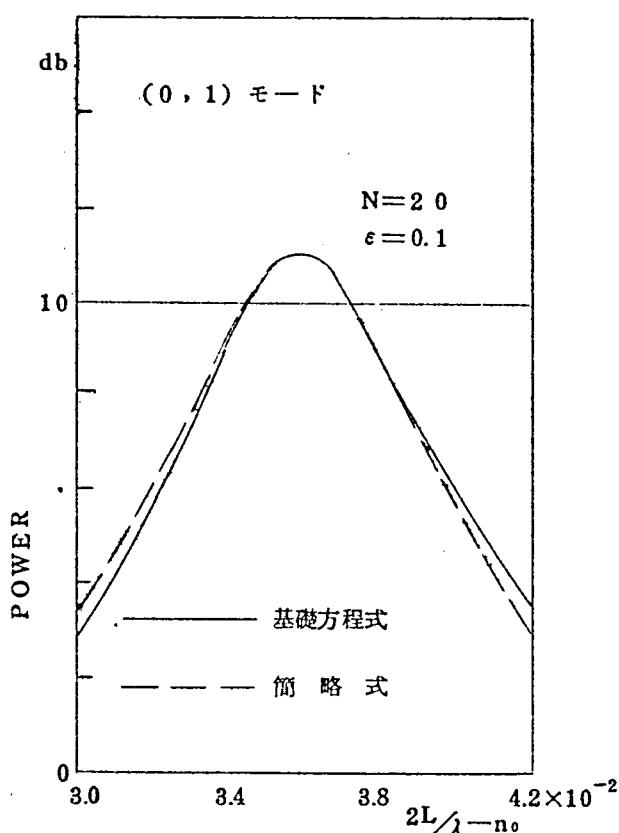
$$A - A_r = \frac{\pi}{2 A_r \alpha^2} \left(\frac{2L}{\lambda} - n_r \right) \quad (2 \cdot 103)$$

となる。これを (2・100) に用いて A の緩かに変化する部分を A_r と書くと, 励振入力は

$$P = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{L}{k} \cdot \frac{\varepsilon_r \alpha A_r^2 |\psi_0|^2}{\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{1}{4} \right) \alpha^2 A_r^2 \right\}^2 + \left(\frac{2L}{\lambda} - n_r \right)^2} \quad (2 \cdot 104)$$



2・10 図 a 簡略式で求めた励振特性
(0,0) モード



2・10 図 b 簡略式で求めた励振特性
(0, 1) モード

となり，簡単な形で書き表せた。上式は周波数 $2L/\lambda$ に対して Lorentz 型の共振である。これはピークに対して左右対称の共振である。(2・104)の近似式と基礎方程式より直接に計算した正確な結果を2・10図で比較する。図 a は (0, 0)，b は (0, 1) モードの共振周波数付近である。点線が (2・104)の近似計算であり，実線が基礎方程式において n に関して12項用いて計算したものである。近似式は共振点付近でよく成立していることがわかる。図示していないが，(2・100)を用いれば(2・104)より近似はよい。

(2・100)は Λ の緩かな変化をも考慮しているために，左右非対称の共振を示し，2・10図の点線よりさらに実線に近くなる。

(2・104)より共振の半値幅 Δn を求めると

$$\Delta n = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{1}{4} \right) \alpha \Lambda_i^2 \quad (2 \cdot 105)$$

である。これよりQ値を求めることができる。ファブリ・ペロー共振器の自由振動の解析では、損失を表わすパラメータとして one transit loss すなわち鏡間距離Lだけ進むときの損失の割合 δ_d を用いている。Q値と δ_d の関係はQの定義より次式となる。

$$Q \equiv \frac{\frac{2\pi c}{\lambda}}{\frac{C}{L} \delta_d} = \frac{\pi n_0}{\delta_d} = \frac{n_0}{\Delta n} \quad (2 \cdot 106)$$

したがって (2・105) より one transit loss は次のようになる。

$$\delta_d = 2 \sqrt{2\pi} \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{1}{4} \right) \omega^2 A_i^2 \quad (2 \cdot 107)$$

これは文献 43) で求めた自由振動の結果と一致している。なお、(2・97) の第2項は、Nが有限のために生じる、共振周波数の偏移を示す項であるが、この結果も文献 43) と一致している。

§ 2・5 増幅および減衰

本章の励振理論は共振器内部と外部の媒質が異なっても適用できる。また媒質が複素誘電率をもっているもよい。ここではレーザ増幅器をモデルとしてとりあげる。共振器内部の媒質の誘電率に虚数部を考慮することにより、増幅（または減衰）のある場合の励振特性を得る。このとき共振器外部の媒質の波数は k （実数）であるとする。したがって § 2・2 と同様、外部の場を記述する (2・14) では、(2・12) のグリーン関数 $H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ をそのまま使用することができる。内部の媒質中での波数 k_i の実数部は外部と同じ k とし、虚数部のみを次のように付加する。

$$k_i = k - i \Delta k \quad (2 \cdot 108)$$

$\Delta k > 0$ のとき増幅を意味する。内部の場を記述する (2・6) は使えるが、この式中に使われている、(2・7) で定義される、グリーン関数 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ 中の A_n は、次式で定義される Γ_n におきかえねばならない。

$$\Gamma_n^2 \equiv (k_i a)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L} \right)^2 \quad (2 \cdot 109)$$

§ 2・2 の場合と同様に、共振器内、外部の場を境界面 S 上でなめらかに接続

すると, (2・23), (2・24) に代る基礎方程式は

$$J_\ell(\Gamma_n) H_\ell(\Gamma_n) a_{n\ell}^\pm - \Gamma_n J_\ell(\Gamma_n) H'_\ell(\Gamma_n) b_{n\ell}^\pm \\ + 8N \sum_m \{ K_{nm} a_{m\ell}^\pm - L_{nm} b_{m\ell}^\pm \} = -2\varepsilon_\ell N H_\ell(\Gamma_n) \psi_{n\ell}^\pm \quad (2 \cdot 110)$$

$$\Gamma_n J'_\ell(\Gamma_n) H_\ell(\Gamma_n) a_{n\ell}^\pm - \Gamma_n^2 J'_\ell(\Gamma_n) H'_\ell(\Gamma_n) b_{n\ell}^\pm \\ + 8N \sum_m \{ M_{nm} a_{m\ell}^\pm - N_{nm} b_{m\ell}^\pm \} = -2\varepsilon_\ell N \Gamma_n H'_\ell(\Gamma_n) \psi_{n\ell}^\pm \quad (2 \cdot 111)$$

$$(n=1, 2, \dots; \ell=0, 1, 2, \dots)$$

となる。ただし K_{nm} , L_{nm} , M_{nm} , N_{nm} は (2・36) ~ (2・43) で与えられるもので, Γ_n ではなくて, (2・8) で定義される, A_n , A_m の関数である。また $\psi_{n\ell}^\pm$ は (2・28) で A_n を Γ_n におきかえたものである。すなわち

$$\psi_{n\ell}^\pm \equiv \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a J_\ell(\Gamma_n \frac{r}{a}) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\} \varphi_0(r, \theta) r dr d\theta \quad (2 \cdot 112)$$

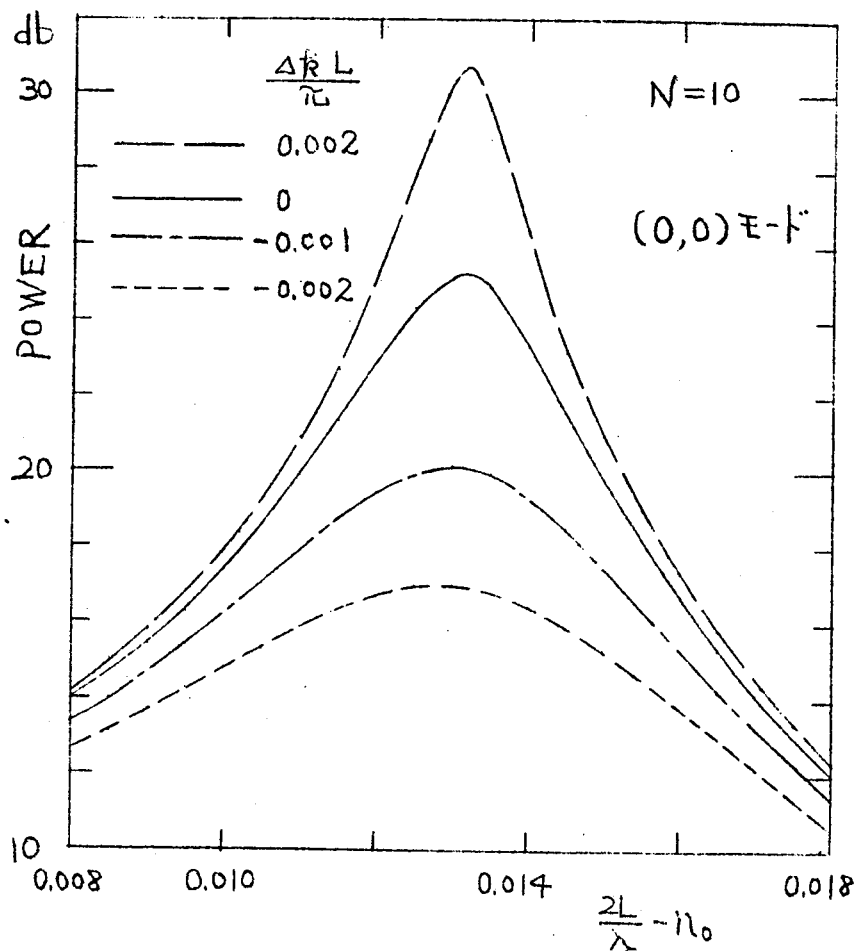
簡単に励振特性を得るために, $n=n_0$ のみで近似する。このとき $4k/k \ll 1$ の範囲をとりあげるから, (2・50) と同様にして

$$\Gamma_{n_0}^2 \cong 4\pi^2 N \left(\frac{2L}{\lambda} - n_0 - i \frac{4k \cdot L}{\pi} \right) \quad (2 \cdot 113)$$

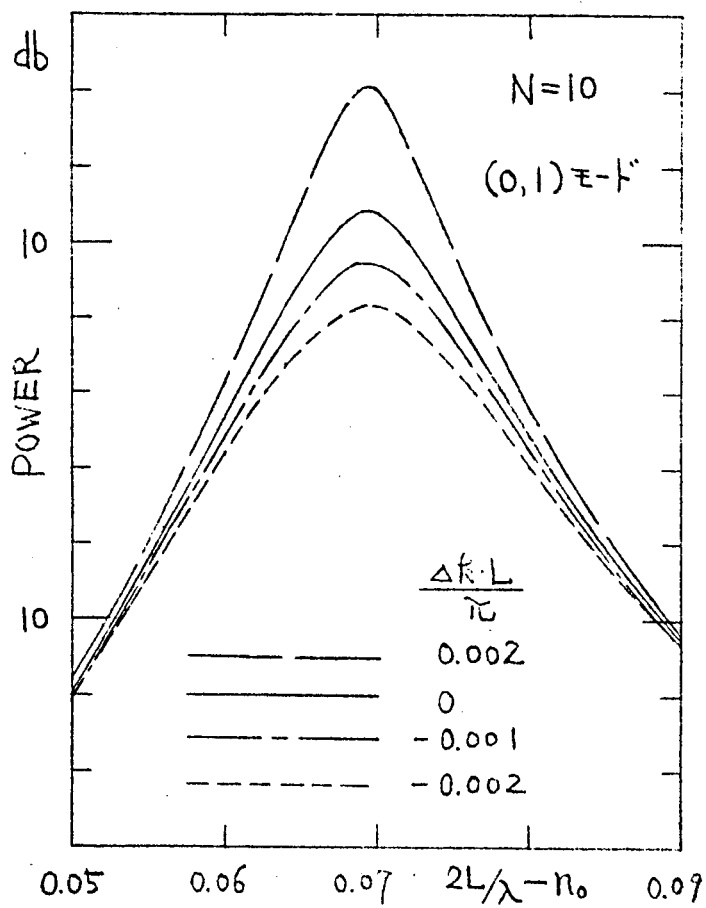
と近似できる。 $4k \cdot L$ は one transit の増巾率を表わす。回折損失より大きな $4k \cdot L$ を与えると発振領域に入るので, その領域での解析は無意味となる。発振の解析を行うには非線型性を考慮せねばならない。本節では, $4k \cdot L$ は十分小さくて線型性の保たれる範囲内にあるものとする。

次に数値例を示す。(2・112) で強制励振源を $\varphi_0(r, \theta) = 1$ とする。 Γ_n は複素数であるが, (2・112) は積分できて, (2・60) で A_n を Γ_n におきかえたものとなる。(2・113) の虚数部 $4k \cdot L/\pi$ をパラメータとして, $2L/\lambda - n_0$ を 0 から 1 まで変化させる。2・11 図 a, b, c には, $N=10$ で $4k \cdot L/\pi = 0.002, 0, -0.001, -0.002$ のときに, それぞれ (0, 0), (0, 1), (0, 2) モードの共振点付近の励振特性を示す。予想されるように, 増巾のときはピークは高く, 半値巾は小さくなり, 減衰ではこの逆となっている。 $4k \cdot L$ の違いによる共振周波数の差は殆んどない。また高次のモードになるほど, 励振特性の $4k \cdot L$ による差は小さい。図は省略したが,

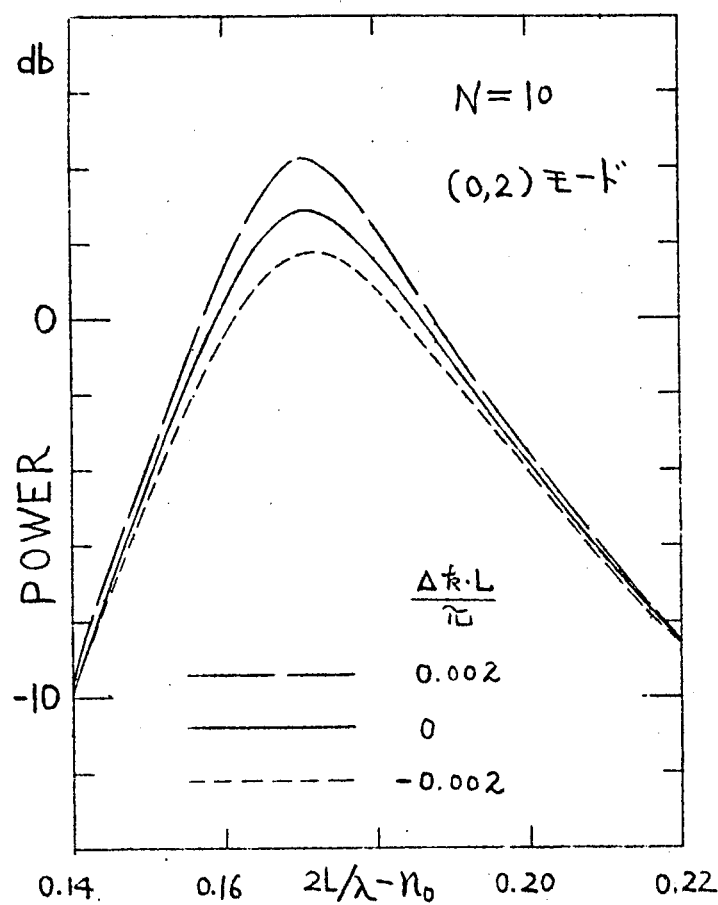
共振点付近以外では、この程度の $\Delta k \cdot L$ の値では殆んど無媒質のときと差のない曲線を示す。



2・11 図 a 増幅，減衰のある場合の励振特性
(0,0) モード



2・11図b 増幅，減衰のある場合の励振特性
(0, 1)モード



2・11 図 c 増幅，減衰のある場合の励振特性
(0, 2) モード

第3章 半透過鏡を通しての励振

§3・1 序

多くの人々によって現在までに行われてきたファブリ・ペロー共振器の解析は、ほとんどすべてが2枚の完全反射鏡より構成される共振器のみに関してであって、外部との結合は論じられていない。しかし実用される共振器は必ず外部との結合を有する。結合の方法としては、反射鏡の中心付近にけられた結合孔によるもの、あるいはミリ波以上の波長に対しては反射鏡に孔をあけて導波管を接続する方法等もあるが、もっともよく用いられるのは微小透過率を有する反射鏡を通して行う方法である。片方あるいは両方の半透過鏡を通して、共振器内部で発振しているレーザ光を外部にとり出したり、あるいは外部から電磁波を入射させて、内部で共振または増巾を行わせている。

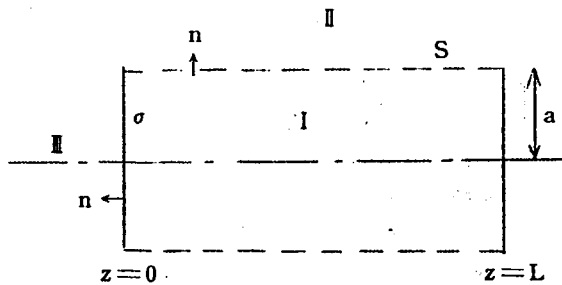
本章では、一枚の完全反射鏡と一枚の半透過鏡より構成されるファブリ・ペロー共振器内へ、半透過鏡を通して外部より平面波を入射させて共振器を励振するモデルをとりあげる。入射平面波の周波数（または共振器の鏡間隔）の変化に対する共振状態の変化を、共振器開口面からの輻射パワーおよび共振器内部の場の分布の変化としてとりあげる。解析は第2章の理論を発展させた形として行う。§3・2では、全空間を共振器の鏡面および開口面を境界として、3つの領域に分ける。すなわち、第2章で考慮した共振器内、外部の両領域以外に、入射波の存在する領域を付加する。次に、鏡の透過率が小さいとして、鏡面における場を透過率のべきに展開して、これを第2章で用いた鏡面上での強制励振源の代りに用いる。このことより、第2章の理論は透過率の小さい極限の場合であることが判る。§3・3では、§3・2で用いた、半透過鏡としての誘電体鏡上における場の境界条件を証明する。§3・4では、入射波として鏡に傾斜して入射する平面波をとりあげて、輻射パワーおよび場の分布の計算方法を示す。§3・5では、自由振動を解析する。すなわち、入射波の存在しない無励振問題における複素周波数の解を求める。この解の虚数部より求めた one transit 当りの損失は、回折損失プラス透過率の半分という予期される結果である。§3・6では、平面波の垂直入射並びに微小傾斜入射の場合に

ついて、電子計算機を使って求めた輻射パワーおよび場の分布の数値例を示す。

半透過鏡を有する共振器の理論解析は、§ 2・1 でふれた Koppelman の簡単な理論³⁵⁾以外には、他には行われていない。しかし実験的には上記のモデルとよく似た方法がしばしば行われている。例えば、Koppelman, Westermann,^{35), 61), 62)} Maier^{63), 64)}によって行われている、ミリ波を使ったファブリ・ペロー共振器の研究では、透過鏡を通して励振することにより、共振周波数、回折損失、場の分布を求めている。この他にも、ミリ波用の高Qの共振器を得る目的、あるいはビーム導波系の基礎実験、あるいは周波数、誘電率の測定等のために、マイクロ波から可視光にいたるまでの種々の波長の電磁波を使って、本章の理論と関連した、半透過鏡をもつファブリ・ペロー共振器の実験がなされている。これら種々の実験の内容に関しては、付録 1・1 に示した。この他に、レーザの発振モードを調べるために用いられている走査型干渉計も本章の理論の実験化と考えられる。

§ 3・2 基礎方程式

平行円板型ファブリ・ペロー共振器の透過鏡を通して、外部より波を入射させて励振する問題を、スカラー波の境界値問題として取扱う。座標系としては円筒座標系を用いる。第 3・1 図に示すように共振器の軸を z 軸とし、 $z=L$ に完全反射鏡があり、 $z=0$ にパワー透過率が T である鏡 σ があるものとする。鏡の半径はともに a とする。共振器の内、外部はともに損失のない同じ媒質で満たされているものとする。第 2 章と同様に、共振器側面 $r=a$ ($0 \leq z \leq L$)



3・1 図 ファブリ・ペロー共振器

に仮想的な境界面 S を考える。これにより共振器を内、外部に分けて、共振器内部の空間を領域 I とし、外部を領域 II とする。本章では境界面 S 以外に、透過鏡 σ を通して、共振器内、外部が結合している。そのために、入射波の存在する透過鏡の外側、すなわち $z < 0$ の空間を領域 III とする。領域 I と III の間には明瞭な境界面を設けないこととする。これは、共振器の寸法が入射波の波長 λ に比べて十分大きいとして、共振器から領域 I および III へ輻射した波動間の結合を無視したためである。

ヘルムホルツ波動方程式

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + k^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3 \cdot 1)$$

の解を求める。境界条件は完全反射鏡上では

$$\varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad z = L \text{ の鏡面上} \quad (3 \cdot 2)$$

である。透過鏡 σ の境界条件はパワー透過率 T を $T \ll 1$ として次式で与えられる。

$$\varphi_e(\mathbf{r}, \theta) = -\frac{\sqrt{T}}{2k} \cdot \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{r}, \theta)}{\partial z}, \quad (3 \cdot 3)$$

$$\varphi_i(\mathbf{r}, \theta) = \frac{\sqrt{T}}{2k} \cdot \frac{\partial \varphi_e(\mathbf{r}, \theta)}{\partial z} \quad (3 \cdot 4)$$

ただし k は波数である。脚符 e および i は、それぞれ鏡 σ の外側および内側の面上を示す。(3・3)、(3・4) の証明は次節で行う。

次に各領域の場を適当なグリーン関数を使って記述する。領域 I、II の場を、第 2 章とまったく同じ形で与える。すなわち領域 I では (2・6) で与えられる。

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & -\int_{\sigma} \frac{\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}') d\sigma' \\ & + \int_S \left[G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}') \right] dS' \quad (3 \cdot 5)^* \end{aligned}$$

ただし、 n' は、3・1図に示されている、境界面および鏡面への垂線である。

* 積分変数の肩に (') のついている場合は、(') のついている変数に関して積分することを意味する。後に現れる (") に関しても同様の取扱いを意味する。

グリーン関数 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ は次の境界条件

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')=0 \quad ; \quad \mathbf{r} \text{ または } \mathbf{r}' \text{ が両鏡の内側の面上の点のとき} \quad (3 \cdot 6)$$

を満たすもので、円筒座標表示では (2・7) で与えられる。領域Ⅱでは、場は (2・14) で与えられる。

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_S \left[H(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}') \right] dS' \quad (3 \cdot 7)$$

ただし $H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ は、自由空間のグリーン関数であって、円筒座標表示では、(2・12) で与えられる。

領域Ⅱでは、場は近似的に次式で与えられる。

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \int \frac{\partial K(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}') d\sigma' \quad (3 \cdot 8)$$

ただし、 $\varphi_0(\mathbf{r})$ は、鏡 σ が完全反射鏡であった場合に、入射波とそれによる反射波とでつくる定在波を意味する。したがって $\varphi_0(\mathbf{r})$ は次の境界条件を満たす。

$$\left[\varphi_0(\mathbf{r}) \right]_{z=0} = 0 \quad (3 \cdot 9)^*$$

グリーン関数 $K(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ は次の境界条件

$$K(\mathbf{r}|\mathbf{r}')=0 \quad , \quad \mathbf{r} \text{ または } \mathbf{r}' \text{ が鏡 } \sigma \text{ の外側の面上の点のとき} \quad (3 \cdot 10)$$

と無限遠における輻射条件を満たすものである。このような条件を満たす $K(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ は、(2・12) で与えられる自由空間のグリーン関数 $H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ をもととして、鏡像の原理により、次の形で与えられる。

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= H(r, \theta, z | r', \theta', z') - H(r, \theta, z | r', \theta', -z') \\ &= \frac{i}{4\pi} \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \cdot J_{\ell}(\lambda r) J_{\ell}(\lambda r') \cos \ell(\theta - \theta') \\ &\quad \times \left[\exp(i\sqrt{k^2 - \lambda^2} |z - z'|) - \exp(i\sqrt{k^2 - \lambda^2} |z + z'|) \right] d\lambda \quad (3 \cdot 11) \end{aligned}$$

第2章と同様の過程をたどって、境界面 S 上で場をなめらかにつなぐ。すなわち、 S 上で領域ⅠとⅡの場とその法線微係数を等しいとにおいて、 S 上における未知関数 φ および $\partial\varphi/\partial n$ に関する連立積分方程式を得る。次に、境界面 S

* 簡単化のため、記号の表示としては、鏡 σ の厚さを無視して、鏡 σ の内面も外面もともに $z=0$ とする。しかし、次節で示すように、実際には鏡は厚さをもつとして取扱っている。

上における未知関数 φ と $\partial\varphi/\partial n$ を次のように展開する。

$$\left[\varphi(\mathbf{r}) \right]_{r=a} = \sum_{n, \ell, \pm} b_{n\ell}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\}, \quad (3 \cdot 12)$$

$$\left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial r} \right]_{r=a} = \frac{1}{a} \sum_{n, \ell, \pm} a_{n\ell}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\} \quad (3 \cdot 13)$$

ただし、 $+$ 、 $-$ はそれぞれ $\cos \ell\theta$ 、 $\sin \ell\theta$ に対応する。(3・12)、(3・13)を用いて連立積分方程式を、次に示す展開係数 $a_{n\ell}^{\pm}$ 、 $b_{n\ell}^{\pm}$ に対する、無限次元の非斉次一次方程式に書換える。

$$\left. \begin{aligned} J_{\ell}(A_n) H_{\ell}(A_n) a_{n\ell}^{\pm} - A_n J_{\ell}(A_n) H'_{\ell}(A_n) b_{n\ell}^{\pm} + 8N \sum_{n'} \{ K_{nn'} a_{n'\ell}^{\pm} - L_{nn'} b_{n'\ell}^{\pm} \} \\ = -2\varepsilon_{\ell} H_{\ell}(A_n) \psi_{n\ell}^{\pm}, \\ A_n J'_{\ell}(A_n) H_{\ell}(A_n) a_{n\ell}^{\pm} - A_n^2 J'_{\ell}(A_n) H'_{\ell}(A_n) b_{n\ell}^{\pm} + 8N \sum_{n'} \{ M_{nn'} a_{n'\ell}^{\pm} - N_{nn'} b_{n'\ell}^{\pm} \} \\ = -2\varepsilon_{\ell} A_n H'_{\ell}(A_n) \psi_{n\ell}^{\pm} \end{aligned} \right\} (3 \cdot 14)$$

($n = 1, 2, \dots, \ell = 0, 1, 2, \dots$)

ただし

$$\varepsilon_{\ell} = \begin{cases} 1 & ; \ell = 0 \\ 2 & ; \ell \neq 0 \end{cases}, \quad (3 \cdot 15)$$

$$A_n^2 = (ka)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2, \quad (3 \cdot 16)$$

$$N = \frac{a^2 n}{2L^2} \cong \frac{a^2}{L\lambda}, \quad (3 \cdot 17)$$

$$\psi_{n\ell}^{\pm} = \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a J_{\ell}(A_n \frac{r}{a}) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\} \varphi_i(r, \theta) r dr d\theta \quad (3 \cdot 18)$$

行列要素 $K_{nn'}$ 、 $L_{nn'}$ 、 $M_{nn'}$ 、 $N_{nn'}$ は、付録2・1に与えられたように、 A_n とフレネル数 N の関数である。方程式(3・14)は、異なる n 間は結合しているが、異なる ℓ および $+$ 、 $-$ に関しては分離している。

以上は第2章とまったく同じ過程であるが、(3・18)の被積分関数中の $\varphi_i(r, \theta)$ が第2章では与えられていたのに対して、本章ではこの $\varphi_i(r, \theta)$ を入射波 $\varphi_0(\mathbf{r})$ を使って表現する必要のあることに違いがある。以下にこれを行

う。透過鏡の外面上における場の法線微係数は、(3・8)を微分することによって次式となる。

$$\frac{\partial \varphi_e(r, \theta)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{oe}(r, \theta)}{\partial z} - \int_{\sigma} \frac{\partial^2 K(r, \theta, -0 | r', \theta', 0)}{\partial z \partial z'} \varphi_e(r', \theta') d\sigma' \quad (3 \cdot 19)$$

$\partial \varphi_{oe} / \partial z$ は $\partial \varphi_o / \partial z$ の鏡の外面上での値を示す。内面上における場の法線微係数は(3・5)を微分することによって次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i(r, \theta)}{\partial z} = & \int_{\sigma} \frac{\partial^2 G(r, \theta, +0 | r', \theta', 0)}{\partial z \partial z'} \varphi_i(r', \theta') d\sigma' + \frac{\partial}{\partial z} \int_S [G(r, \theta, 0 | a, \theta', z') \\ & \times \frac{\partial \varphi(a, \theta', z)}{\partial r'} - \frac{\partial G(r, \theta, 0 | a, \theta', z)}{\partial r'} \varphi(a, \theta', z)] dS' \end{aligned} \quad (3 \cdot 20)$$

透過鏡の境界条件(3・3)，(3・4)を使って，(3・19)，(3・20)に逐次近似を行う。 $\partial \varphi_e / \partial z$ の0次近似として(3・19)右辺の第1項をとる。

$$\left[\frac{\partial \varphi_o(r, \theta)}{\partial z} \right]^{(0)} = \frac{\partial \varphi_{oe}(r, \theta)}{\partial z} \quad (3 \cdot 21)$$

肩符(0)，(1)……は，0次，1次，……近似を意味するものとする。これを境界条件(3・4)の右辺に用いて， $\varphi_i(r, \theta)$ の0次近似を得る。

$$\left[\varphi_i(r, \theta) \right]^{(0)} = \frac{\sqrt{T}}{2k} \cdot \frac{\partial \varphi_{oe}(r, \theta)}{\partial z} \quad (3 \cdot 22)$$

これを(3・20)の右辺の積分中に用いて， $\partial \varphi_i / \partial z$ の1次近似を得る。

$$\left[\frac{\partial \varphi_i(r, \theta)}{\partial z} \right]^{(1)} = \frac{\sqrt{T}}{2k} \int_{\sigma} \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z'} \frac{\partial \varphi_{oe}}{\partial z'} d\sigma' + \frac{\partial}{\partial z} \int_S \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial r'} - \frac{\partial G}{\partial r'} \varphi \right) dS' \quad (3 \cdot 23)$$

これを境界条件(3・3)の右辺に用いて， $\varphi_e(r, \theta)$ の1次近似を得る。

$$\begin{aligned} \left[\varphi_e(r, \theta) \right]^{(1)} = & -\frac{T}{4k^2} \int_{\sigma} \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z'} \frac{\partial \varphi_{oe}}{\partial z'} d\sigma' \\ & - \frac{\sqrt{T}}{2k} \frac{\partial}{\partial z} \int_S \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial r'} - \frac{\partial G}{\partial r'} \varphi \right) dS' \end{aligned} \quad (3 \cdot 24)$$

これを(3・19)の積分中に用いて， $\partial \varphi_e / \partial z$ の1次近似を得る。

$$\left[\frac{\partial \varphi_e(r, \theta)}{\partial z} \right]^{(1)} = \frac{\partial \varphi_{oe}}{\partial z} + \frac{T}{4k^2} \int_{\sigma} \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial z'} \int_{\sigma} \frac{\partial^2 K}{\partial z' \partial z''} \frac{\partial \varphi_{oe}}{\partial z''} d\sigma'' d\sigma'$$

$$+\frac{\sqrt{T}}{2k}\oint\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial z'}\frac{\partial}{\partial z'}\int_S\left[G\frac{\partial\varphi}{\partial r''}-\frac{\partial G}{\partial r''}\varphi\right]dS''d\sigma' \quad (3\cdot 25)$$

これを境界条件 (3・4) により $\varphi_i^{(1)}$ に変換して、それを (3・18) の積分中に用いる。この結果として、(3・14) は $a_{n\ell}^{\pm}, b_{n\ell}^{\pm}$ に関して解くことができる。上述の逐次代入の過程をくり返すことによって、順次高次の近似を得ることができる。しかし n 次の近似式は、 $(n-1)$ 次の近似式に、パワー透過率 T の n 乗を係数にもつ項を付加するに過ぎない。したがって $T \ll 1$ のときは、1 次近似で十分である。

§3・3 半透過鏡の境界条件

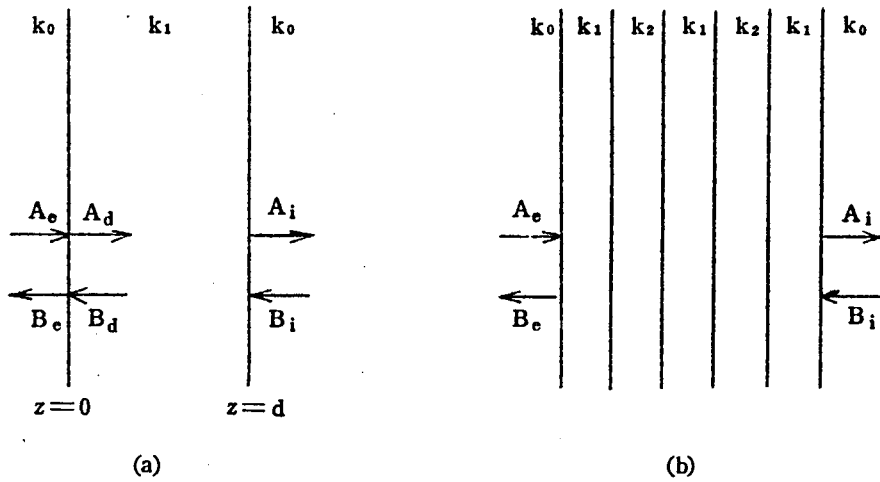
本節では、前節に用いた半透過鏡の境界条件 (3・3), (3・4) を誘電体鏡をモデルとして導く。誘電体鏡は、厚さ $1/4$ 波長の高屈折率の材料と低屈折率の材料を交互に重ね合せた誘電体多層膜である。実際にレーザ共振器に使用されている 100% に近い反射率の鏡は、屈折率 2.2 と 1.4 程度の誘電体で十数層の多層膜をなしている。本節では、誘電体鏡に平面波が垂直に入射する場合に、最初に、厚さ $1/4$ 波長の単一層について、次に、各層の厚さが同じ $1/4$ 波長の多層膜について、(3・3), (3・4) の境界条件を導く。最後に、厚さが $1/4$ 波長よりずれたときに、鏡面の座標のとり方をずらすことにより、同じ境界条件が成立することを証明する。次節では、平面波の傾斜入射について論じるが、その傾斜角は非常に小さいので、平面波の垂直入射の場合の (3・3), (3・4) を、そのまま成立するとして、使用する。また共振時に関しても、波動は平面波よりずれるが、同様に (3・3), (3・4) を使用する。

最初の例として、単一層の誘電体に平面波が垂直に入射する場合を考える。誘電層の厚さを d とし、真空中と誘電層中の波数をそれぞれ k_0, k_1 とする。3・2 図 a の如く、誘電層に垂直に z 軸を定めて、境界面を $z=0$ および $z=d$ とする。係数 A, B を複素数として、各々の領域で波を次のように表示する。

$$\varphi = A_0 \exp(ik_0 z) + B_0 \exp(-ik_0 z) \quad ; \quad z \leq 0 \quad , \quad (3\cdot 26)$$

$$\varphi = A_1 \exp\{ik_0(z-d)\} + B_1 \exp\{-ik_0(z-d)\} \quad ; \quad z \geq d \quad , \quad (3\cdot 27)$$

$$\varphi = A_d \exp(ik_1 z) + B_d \exp(-ik_1 z) \quad , \quad 0 \leq z \leq d \quad (3\cdot 28)$$



3・2図 誘電体鏡

境界面 $z = 0, d$ で場をなめらかに接続するため、 φ と $\partial\varphi/\partial n$ を等しいとおくと次式となる。

$$A_e + B_e = A_d + B_d \quad (3 \cdot 29)$$

$$k_0 (A_e - B_e) = k_1 (A_d - B_d) \quad (3 \cdot 30)$$

$$A_d \exp(ik_1 d) + B_d \exp(-ik_1 d) = A_i + B_i \quad (3 \cdot 31)$$

$$k_1 \{A_d \exp(ik_1 d) - B_d \exp(-ik_1 d)\} = k_0 (A_i - B_i) \quad (3 \cdot 32)$$

以上4個の式(3・29)～(3・32)より A_d, B_d を消去すると、次式となる。

$$\begin{pmatrix} A_e + B_e \\ A_e - B_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k_1 d & -i \frac{k_0}{k_1} \sin k_1 d \\ -i \frac{k_1}{k_0} \sin k_1 d & \cos k_1 d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i + B_i \\ A_i - B_i \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 33)$$

厚さ d が $1/4$ 波長に等しいとき(3・33)の 2×2 行列の対角要素は消えて

$$\begin{pmatrix} A_e + B_e \\ A_e - B_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -iK \\ -i/K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i + B_i \\ A_i - B_i \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 34)$$

となる。ただし

$$K \equiv k_0 / k_1 \quad (3 \cdot 35)$$

である。

次に 3・2 図 b のように、厚さが $1/4$ 波長の高屈折率と低屈折率の材料が、交互に重なって、 $(2n+1)$ 層をなしている多層膜を考える。 k_1, k_2 をそれぞれ高、低屈折率材料中の波数とすると、(3・33) を求めたのと同様にして次式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_e + B_e \\ A_e - B_e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1/k_0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -ik_1/k_2 \\ -ik_2/k_1 & 0 \end{pmatrix} \right\}^n \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_0/k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i + B_i \\ A_i - B_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -iK \\ -i/K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i + B_i \\ A_i - B_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3 \cdot 36)$$

ただしこの場合

$$K \equiv \frac{k_0}{k_1} \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)^n \quad (3 \cdot 37)$$

である。(3・35) は $n=0$ の場合となっている。(3・36) を場とその微係数の関係に書き換えると、次式となる。

$$\begin{pmatrix} \varphi_e \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K \\ 1/K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 38)$$

K とパワー透過率 T の関係を求めるために、(3・36) で $B_i=0$ とおいて A_i/A_e を求めると、

$$A_i/A_e = 2iK/(1-K^2) \quad (3 \cdot 39)$$

となる。したがって T は次式で与えられる。

$$T \equiv |A_i/A_e|^2 = 4K^2/(1-K^2)^2 \quad (3 \cdot 40)$$

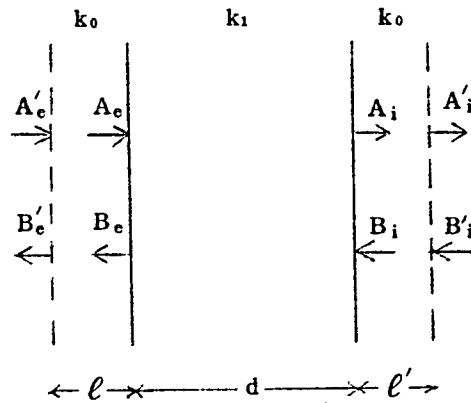
$K \ll 1$ の高反射率の場合

$$T \cong 4K^2 \quad (3 \cdot 41)$$

となり、これを (3・38) に使うと、次式となる。

$$\begin{pmatrix} \varphi_e \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{T/2} \\ 2/\sqrt{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 42)$$

これは透過鏡の境界条件 (3・3) , (3・4) に他ならない。



3・3図 単一層誘電体の基準面

誘電体単一層の厚さが丁度 $1/4$ 波長になっていないときは、3・3図のように、境界面より l , l' はなれた面を基準面にとることにより、(3・34) のように対角項を0とすることができる。 l , l' は以下のように定める。左および右の基準面を基準とする場をそれぞれ

$$\varphi = A'_e \exp\{ik_0(z+l)\} + B'_e \exp\{-ik_0(z+l)\}, \quad (3 \cdot 43)$$

$$\varphi = A'_i \exp\{ik_0(z-d-l')\} + B'_i \exp\{-ik_0(z-d-l')\} \quad (3 \cdot 44)$$

とおく。これらと (3・26) , (3・27) で表わされる場とは、

$$\begin{pmatrix} A'_e + B'_e \\ A'_e - B'_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k_0 l & -i \sin k_0 l \\ -i \sin k_0 l & \cos k_0 l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_e + B_e \\ A_e - B_e \end{pmatrix}, \quad (3 \cdot 45)$$

$$\begin{pmatrix} A_i + B_i \\ A_i - B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k_0 l' & -i \sin k_0 l' \\ -i \sin k_0 l' & \cos k_0 l' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_i + B'_i \\ A'_i - B'_i \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 46)$$

の関係がある。(3・33)にこれを用いて、 $\begin{pmatrix} A'_e + B'_e \\ A'_e - B'_e \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} A'_i + B'_i \\ A'_i - B'_i \end{pmatrix}$ の関係を表わす行列の対角要素が0となるように、 ℓ, ℓ' を定める。その結果は、

$$\tan k_0 \ell = \tan k_0 \ell' = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{1}{K} + K\right) \tan k_1 d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{K} + K\right)^2 \tan^2 k_1 d + 4} \right\} \quad (3 \cdot 47)$$

となる。 $K \ll 1$ のときは

$$\tan k_0 \ell = \tan k_0 \ell' \cong K \cot k_1 d \quad (3 \cdot 48)$$

である。これを使うと次式の関係を得る。

$$\begin{pmatrix} A'_e + B'_e \\ A'_e - B'_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i K / \sin k_1 d \\ -i \sin k_1 d / K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_i + B'_i \\ A'_i - B'_i \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 49)$$

(3・49)は(3・34)と比較して、 K が $K / \sin k_1 d$ に代っただけである。したがって、基準面を鏡面より、微小距離 ℓ, ℓ' だけずらすことにより、(3・3)、(3・4)の境界条件を使うことができる。多層膜誘電体鏡においても、各層が $1/4$ 波長厚よりずれているときには、同様に基準面を鏡面よりずらすことにより、同じ境界条件が使える。これに関しては計算が繁雑であるので付録3・1に示す。

§3・4 平面波の傾斜入射

本節では、平面波が共振器軸に対してわずかに傾斜して入射する場合をとりあげて、(3・25)を具体的に計算する。平面波の波動ベクトルは、 $\theta = 0$ の平面(xz 面)内にあって、 z 軸と角 ψ をなしているものとする。このとき(3・8)第1項の定在波 $\varphi_0(\mathbf{r})$ は次のように表わされる。

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \sin(kz \cos \psi) \exp(ik \sin \psi r \cos \theta), \quad z < 0 \quad (3 \cdot 50)^*$$

(3・50)を用いて、(3・25)を以下のように求めてゆく。 $kL \gg 1$ のとき、グリーン関数の微分は次のように近似される。

$$\left. \frac{\partial^2 G(\mathbf{r} | \mathbf{r}')}{\partial z \partial z'} \right|_{z=z'=0} = \frac{ik^2}{2L} \sum_{n, \ell} \epsilon_{\ell} \cos \ell(\theta - \theta') \begin{cases} J_{\ell}(A_n \frac{r}{a}) H_{\ell}(A_n \frac{r'}{a}) & r < r' \\ H_{\ell}(A_n \frac{r}{a}) J_{\ell}(A_n \frac{r'}{a}) & r > r' \end{cases} \quad (3 \cdot 51)$$

* 入射波は鏡 σ のみを照射するものとし、 $r < a$ において(3・50)を用いる。

$$\left. \frac{\partial^2 K(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial z \partial z'} \right|_{z=z'=0} = \frac{ik}{2\pi a^2} \sum_{\ell} \varepsilon_{\ell} \cos \ell(\theta - \theta') \int_0^{\infty} J_{\ell}(A \frac{r}{a}) J_{\ell}(A \frac{r'}{a}) A dA \quad (3 \cdot 52)$$

(3・51) を使って次の積分が計算できる。

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z'} \cdot \frac{\partial \varphi_{oe}}{\partial z'} d\sigma = i 2\pi^2 k^2 N \cos \psi \sum_{n, \ell} \varepsilon_{\ell} i^{\ell} \cos \ell \theta \cdot Q_{\ell}(k a \sin \psi, A_n, \frac{r}{a}) \quad (3 \cdot 53)$$

ただし $Q_{\ell}(\alpha, \beta, x)$ は次式で与えられる。

$$Q_{\ell}(\alpha, \beta, x) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} [J_{\ell}(\beta x) \{ \beta H'_{\ell}(\beta) J_{\ell}(\alpha) - \alpha H'_{\ell}(\beta) J'_{\ell}(\alpha) \} - \frac{2i}{\pi} J_{\ell}(\alpha x)] \quad (3 \cdot 54)$$

(3・53) を得るとき、 r' と θ' の積分に関して、付録 3・2 の (A3・10) ~ (A3・12) を使った。(3・52), (3・53) により、(3・25) の第 2 項は

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial z'} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial z' \partial z''} \cdot \frac{\partial \varphi_{oe}}{\partial z''} d\sigma'' d\sigma' \\ &= -2\pi^2 k^3 N \cos \psi \sum_{n, \ell} \varepsilon_{\ell} i^{\ell} \cos \ell \theta \int_0^{\infty} \frac{J_{\ell}(A \frac{r}{a})}{A_n^2 - (k a \sin \psi)^2} \\ & \times [P_{\ell}(A, A_n) \{ -A_n H'_{\ell}(A_n) J_{\ell}(k a \sin \psi) + k a \sin \psi H_{\ell}(A_n) J'_{\ell}(k a \sin \psi) \} \\ & + \frac{2i}{\pi} P_{\ell}(A, k a \sin \psi)] A dA \quad (3 \cdot 55) \end{aligned}$$

となる。ただし $P_{\ell}(\alpha, \beta)$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} P_{\ell}(\alpha, \beta) &= P_{\ell}(\beta, \alpha) \equiv \frac{1}{a^2} \int_0^a J_{\ell}(\alpha \frac{r}{a}) J_{\ell}(\beta \frac{r}{a}) r dr \\ &= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ -\alpha J'_{\ell}(\alpha) J_{\ell}(\beta) + \beta J_{\ell}(\alpha) J'_{\ell}(\beta) \} \quad (3 \cdot 56) \end{aligned}$$

(3・25) の第 3 項は $a_{n\ell}$, $b_{n\ell}$ を使って表わされる。すなわち次式である。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial z'} \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \int_S (G \frac{\partial \varphi}{\partial r'} - \frac{\partial G}{\partial r''} \varphi) dS'' d\sigma' \\ &= -\frac{\pi k^2}{2} \sum_{\ell, n} [a_{n\ell} H_{\ell}(A_n) - b_{n\ell} A_n H'_{\ell}(A_n)] \cos \ell \theta \\ & \times \int_0^{\infty} J_{\ell}(A \frac{r}{a}) P_{\ell}(A, A_n) A dA \quad (3 \cdot 57) \end{aligned}$$

ただしここで $a_{n\ell}$, $b_{n\ell}$ の肩符 + を省略した。これは, (3・50) の φ_0 が + モードすなわち $\cos \ell \theta$ モードのみを励振するからである。

(3・55) と (3・57) を (3・25) に代入して, $[\partial \varphi_0 / \partial z]^{(1)}$ を得て, これを (3・4) により $\varphi_i^{(1)}$ に変換する。この結果を (3・18) に用いると次式となる。

$$\begin{aligned} \psi_{n\ell} = & i\ell\pi\sqrt{T} \cos\psi P_\ell(A_n, ka \sin\psi) + \frac{1}{2} i\ell\pi^3 NT^{3/2} \cos\psi \\ & \times \sum_m \frac{1}{[A_m^2 - (ka \sin\psi)^2]} \{ P_\ell(A_n, A_m) [A_m H'_\ell(A_m) J_\ell(ka \sin\psi) \\ & - ka \sin\psi H_\ell(A_m) J'_\ell(ka \sin\psi)] - \frac{2i}{\pi} P_\ell(A_n, ka \sin\psi) \} \\ & - \frac{\pi^2 T}{4\epsilon_\ell} \sum_m [a_{m\ell} H_\ell(A_m) - b_{m\ell} A_m H'_\ell(A_m)] P_\ell(A_n, A_m) \end{aligned} \quad (3 \cdot 58)$$

ただし上式導出の過程で (A3・16) を用いた。

(3・58) を用いると, 基礎方程式 (3・14) を $a_{n\ell}$, $b_{n\ell}$ に関して解くことができる。このとき開口面 S より輻射されるパワー P は, (2・58) により与えられる。

$$P = \frac{1}{k} \operatorname{Im} \left(\int_S \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS \right) = \frac{\pi L}{k} \operatorname{Im} \left(\sum_{n,\ell} \frac{b_{n\ell}^* a_{n\ell}}{\epsilon_\ell} \right) \quad (3 \cdot 59)$$

基礎方程式 (3・14) 中の行列要素 K_{nm} , L_{nm} , M_{nm} , N_{nm} は, n , m の偶奇性が異なると 0 となるものである。しかし, 同じ基礎方程式中に含まれる (3・58) 中の $P_\ell(A_n, A_m)$ のために, n , m の偶奇性が異なっても, A_n と A_m の結合が生じる。したがって, 第 2 章と異なり, 基礎方程式は n の偶奇により分離しない。

(3・58) において, $T \rightarrow 0$ とすれば, 第 1 項のみを考慮すればよい。ここで入射角 ψ を $\psi = 0$ とすれば

$$\psi_{n0} = \pi \sqrt{T} \cdot \frac{J_1(A_n)}{A_n} \quad (3 \cdot 60)$$

となり, これは $\epsilon = 1$ のときの (2・60), すなわち

$$\psi_{n0} = 2\pi \cdot \frac{J_1(A_n)}{A_n} \quad (3 \cdot 61)$$

と係数を除いて一致する。すなわち、第2章における強制励振は、共振器外部より平面波が鏡に垂直に入射するモデルで、鏡の透過率 T が $T \rightarrow 0$ の極限である場合に相当している。

共振器内部の場の分布は (3・5) の第1項の積分中の $\varphi(\mathbf{r}')$ に $\varphi_1^{(1)}$ を用いることにより

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, z) = & i\pi^2 N \sum_{n, \ell} \varepsilon_\ell \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos \ell \theta \left\{ i^\ell T^{1/2} \cos \psi \right. \\ & \times Q_\ell(ka \sin \psi, A_n, \frac{r}{a}) + \frac{1}{2\pi N \varepsilon_\ell} J_\ell(A_n \frac{r}{a}) \{ a_{n\ell} H_\ell(A_n) - b_{n\ell} A_n H'_\ell(A_n) \} \\ & - \frac{1}{2} i^\ell \pi^2 N T^{3/2} \cos \psi \sum_m \frac{1}{[A_n^2 - (ka \sin \psi)^2]} \cdot [Q_\ell(A_m, A_n, \frac{r}{a}) \\ & \times \{ -A_m H'_\ell(A_m) J_\ell(ka \sin \psi) + ka \sin \psi H_\ell(A_m) J'_\ell(ka \sin \psi) \} \\ & + \frac{2i}{\pi} Q_\ell(ka \sin \psi, A_n, \frac{r}{a})] \\ & - \frac{\pi T}{4\varepsilon_\ell} \cdot \sum_m Q_\ell(A_m, A_n, \frac{r}{a}) \{ a_{m\ell} H_\ell(A_m) - b_{m\ell} A_m H'_\ell(A_m) \} \quad (3 \cdot 62) \end{aligned}$$

となる。このとき (A3・16), (A3・18) を用いた。数値結果については §3・6 に示す。

§3・5 自由振動

本節では、前節の特別な例として、自由振動、すなわち励振源のないときの斉次方程式の複素周波数の解について述べる。励振のないとき、基礎方程式 (3・14) は次のような斉次方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} & J_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_{n\ell} - A_n J_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_{n\ell} + \sum_m (8N \{ K_{nm} a_{m\ell} - L_{nm} b_{m\ell} \} \\ & - \frac{1}{2} \pi^2 T N H_\ell(A_n) P_\ell(A_n, A_m) \{ H_\ell(A_m) a_{m\ell} - A_m H'_\ell(A_m) b_{m\ell} \}) = 0, \\ & A_n J'_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_{n\ell} - A_n^2 J'_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_{n\ell} + \sum_m (8N \{ M_{nm} a_{m\ell} - N_{nm} b_{m\ell} \} \\ & - \frac{1}{2} \pi^2 T N A_n H'_\ell(A_n) P_\ell(A_n, A_m) \{ H_\ell(A_m) a_{m\ell} - A_m H'_\ell(A_m) b_{m\ell} \}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 63)$$

ただしここで (3・58) を用いた。齊次方程式 (3・63) の解が、半透過鏡をもった共振器の自由振動を与える。 $N \gg 1$, $T \ll 1$ の条件の下に、回折損失の近似値を得るために、文献 43) と同様に、 n の異なるモード間の結合を無視する。(3・63) の係数の作る行列式は

$$\begin{aligned} & J_{\ell}(A) H_{\ell}(A) N_{nn} - A J_{\ell}(A) H'_{\ell}(A) M_{nn} - A J'_{\ell}(A) H_{\ell}(A) L_{nn} \\ & + A^2 J'_{\ell}(A) H'_{\ell}(A) K_{nn} + 8N \{ K_{nn} N_{nn} - L_{nn} M_{nn} \} - \frac{\pi^2}{2} T N P_{\ell}(A, A) \\ & \times [\{ H_{\ell}(A) \}^2 N_{nn} - A H_{\ell}(A) H'_{\ell}(A) \{ L_{nn} + M_{nn} \} + \{ A H'_{\ell}(A) \}^2 K_{nn}] = 0 \quad (3 \cdot 64) \end{aligned}$$

となる。ここで簡単化のため、 A_n を単に A と記した。(3・64) を複素数の A に関して解くことが目的である。この A より複素共振周波数が求まり、その実数部より共振周波数、虚数部より共振器の損失が分る。

$N \gg 1$, $T \ll 1$ の条件の下で、(3・64) 中のもっとも主要な項は、 $J_{\ell}(A) H_{\ell}(A) N_{nn}$ である。(付録 A 2・1 参照)。それ故に、 A の 0 次近似は、ベッセル関数の根である。それを $A_{\ell m}$ と記すと

$$J_{\ell}(A_{\ell m}) \equiv 0, \quad \ell, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3 \cdot 65)$$

である。次に A の近似をよくしていく。(3・64) では、第 1 項のベッセル関数以外では、 A のところに $A_{\ell m}$ を使うこととする。行列要素 K_{nn} , L_{nn} , M_{nn} , N_{nn} を、(A 2・28) ~ (A 2・31) により、 α のべきで表わしたものを使う。ただし

$$\alpha^2 \equiv 1 / (4 \pi N) \quad (3 \cdot 66)$$

である。その結果として、(3・64) は次のように簡単化される。

$$\begin{aligned} & i J_{\ell}(A) N_{\ell}(A_{\ell m}) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) (1-i) \alpha \\ & + \frac{1}{4} \pi^2 T N \{ J_{\ell+1}(A_{\ell m}) \}^2 \{ N_{\ell}(A_{\ell m}) \}^2 \cong 0 \quad (3 \cdot 67) \end{aligned}$$

ここで次の関係を使った

$$P_{\ell}(A_{\ell m}, A_{\ell m}) = \frac{1}{2} \{ J_{\ell+1}(A_{\ell m}) \}^2 \quad (3 \cdot 68)$$

(3・68) は $P_{\ell}(\alpha, \beta)$ の、 $\alpha = \beta$ のときの関係式

$$P_{\ell}(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2} [\{J_{\ell}(\alpha)\}^2 + \{J_{\ell+1}(\alpha)\}^2 - \frac{2\ell}{\alpha} J_{\ell}(\alpha) J_{\ell+1}(\alpha)] \quad (3 \cdot 69)$$

において (3・65) を考慮したものである。

(3・67) を解く際に、 A を次のようにおいて

$$A \equiv A_{\ell m}(1+\delta) \quad , \quad (\delta \ll 1) \quad (3 \cdot 70)$$

δ に関して (3・67) を解くと

$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{1}{4} \right) (1+i) \alpha - i \frac{\pi T N}{2 A_{\ell m}^2} \quad (3 \cdot 71)$$

となる。ここで、Lommel の公式 (2・76) より導いた、次の関係を利用した。

$$J_{\ell+1}(A_{\ell m}) N_{\ell}(A_{\ell m}) = \frac{2}{\pi A_{\ell m}} \quad (3 \cdot 72)$$

ここで、光が鏡間距離 L だけ進んだときの損失、one transit loss δ_d を、(3・16) を媒介として求める。すなわち

$$\delta_d \equiv 1 - |e^{ikL}|^2 \quad (3 \cdot 73)$$

を次の A の近似式によって求める。

$$A^2 \cong 4\pi N(kL - n\pi) \quad (3 \cdot 74)$$

$\delta_d \ll 1$ のときは、次のように簡単化される。

$$\begin{aligned} \delta_d &\cong I_m(2kL) \cong I_m(A^2/2\pi N) \\ &\cong \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left(\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{8} \right) A_{\ell m}^2 N^{-3/2} + \frac{1}{2} T \end{aligned} \quad (3 \cdot 75)$$

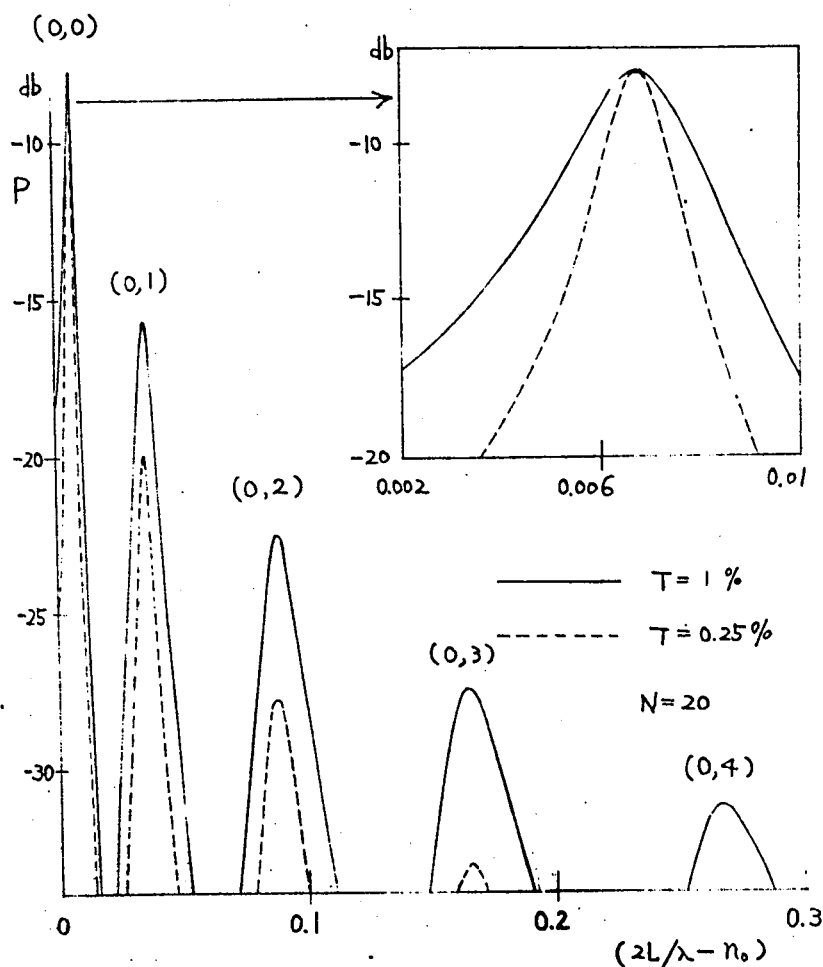
(3・75) の第1項は回折損失を表わし、第2項は鏡による透過損失を表わす。(3・75) は、この共振器の損失が、回折損失プラス半透過鏡の透過率の $1/2$ であるという当然予想される結果を示している。(3・71) の δ の実数部中に、透過率 T を含まないことは、共振周波数は第1次近似として T に影響されないことを示す。

§3・6 数 値 結 果

本節では、電子計算機 (KDC II, 東大大型計算機) を使って、入射平面波の周波数変化に対する共振器側面より輻射するパワーの変化、および共振器内部

における場の分布を数値計算した結果を示す。平面波が、鏡 σ に対して、垂直に入射する場合と、わずかに傾斜して入射する場合に分けて調べる。垂直入射の場合は、波は回転対称であるから、 $\ell=0$ の回転対称のモードのみを励振する。それに反して、傾斜入射の場合は、回転対称性が失われているので、すべての ℓ のモードを励振する。

3・4図に平面波の垂直入射($\psi=0$)の場合に、共振器側面より輻射するパワーを、入射平面波の周波数に対してプロットした。横軸は周波数と称しているが、正確には $2L/\lambda - n_0$ のことである。 n_0 は A_n^2 が正で最小である n のことである。つまり、 $2L/\lambda - n_0$ は、共振器の鏡間隔 L を半波長 $\lambda/2$ でわっ

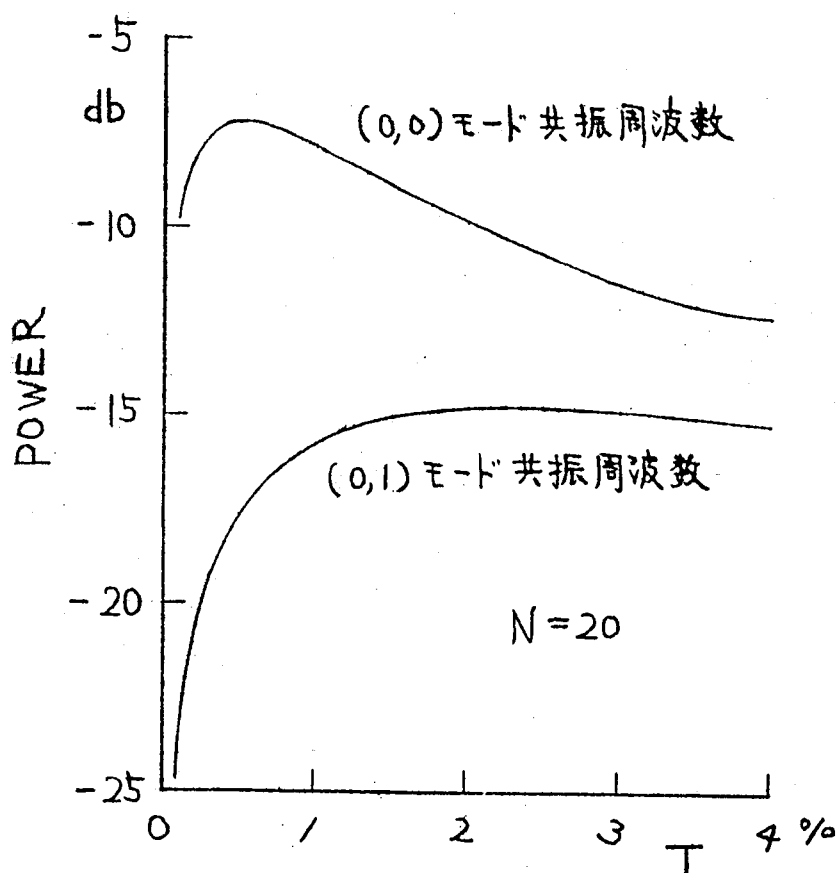


3・4図 垂直入射の励振特性

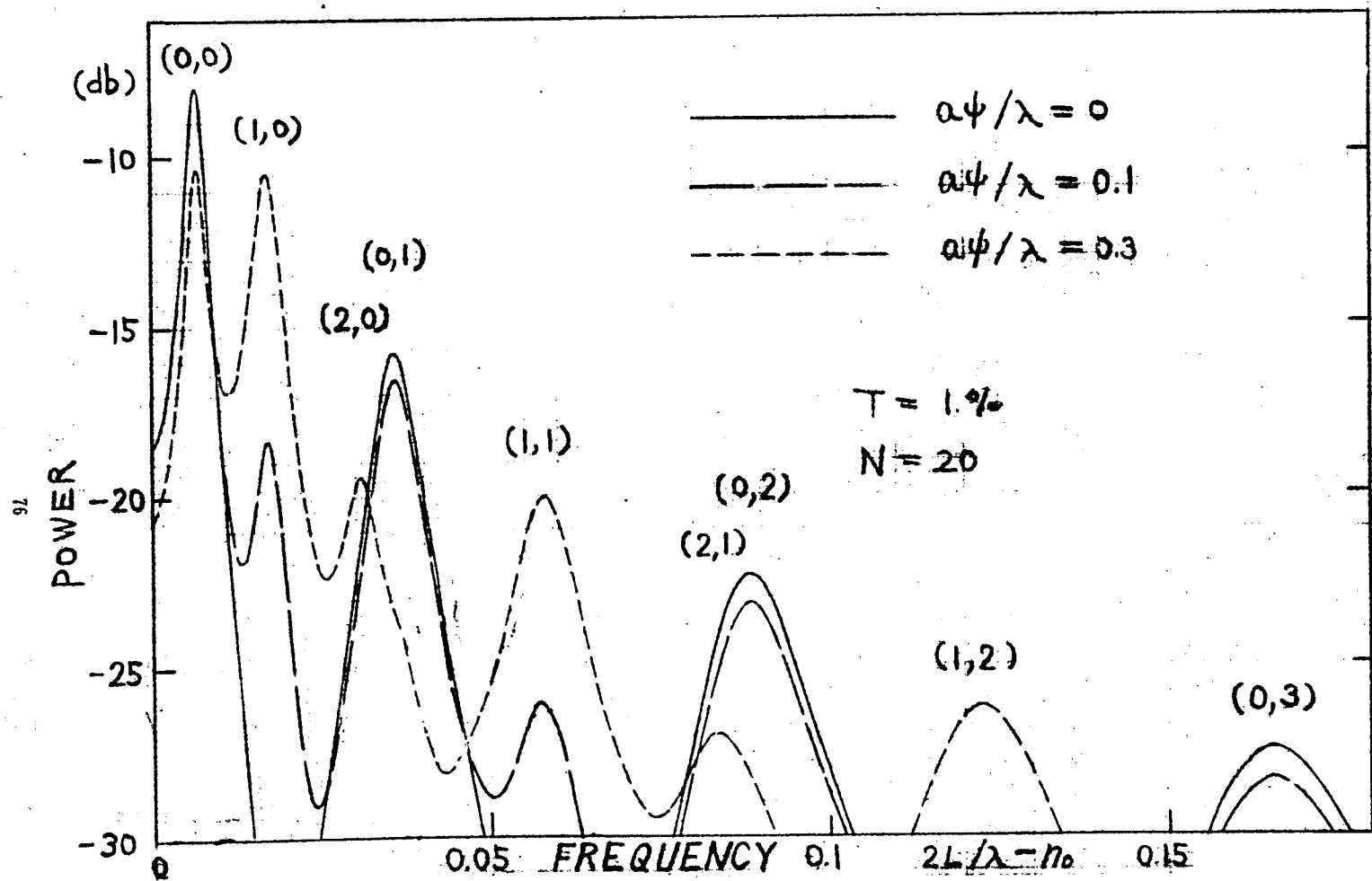
た商の小数部分のことである。 $2L/\lambda$ が1だけ増減する毎に、全く同じ励振曲線が繰り返される。縦軸は共振器側面から輻射されるパワーを、鏡全面に入射するパワーを基準として、db目盛で示したものである。透過率 T の値が1%と $1/4\%$ のときの励振曲線を示す。フレネル数 N は20である。図の共振点は左から順に $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$ ……モードである。本来横軸は0~1の範囲を示すべきであるが、図示していない横軸0.3~1の範囲では、輻射パワーは非常に小さく、 -35 db 以下であるので省略した。 $(0, 0)$ の共振点では、 -7.8 db すなわち鏡面に入射するパワーの約 $1/6$ が共振器側面より輻射される。入射平面波が鏡全面を照射しているために、 $(0, 0)$ モードと比べると、高次のモードのパワーは小さいが、これは鏡の透過率により大きく異なる。 $(0, 0)$ モードの共振点付近の拡大図を3・4図右上隅に示す。 $T=1\%$, $1/4\%$ に対する半値巾より計算したone transit loss ($(2 \cdot 106)$ 参照)はそれぞれ0.85%, 0.44%である。これらの数値より $N=20$ のときの回折損失0.30%を引き去ると、残りは0.55%, 0.14%となり、ほぼone transitの透過損失 $T/2$ に等しい。なお、計算に用いた n に関する項数は、 $n \leq n_0$ の項が20項、 $n > n_0$ の項が2項である。 $n < n_0$ は $A_n^2 < 0$ に相当し、パワーの計算に対しては殆んど寄与しない。3・4図の励振曲線は上記の項数で十分良く収束している。特に、 N が大きい場合および T が小さい場合には収束は良い。また、各モードの共振点付近の周波数においては、 $n = n_0$ の項から輻射パワーへの寄与が、他の n の項からの寄与に比べて圧倒的に大きいから、収束は非常に良い。ただ共振と共振の間の周波数では収束は悪い。しかし實際上興味のあるのは、収束の良い低次のモードの共振点付近と考えられるので実用上問題はない。 N および T と、励振曲線との関係を述べる。 N は1例として20としたが、第2章で述べた様に、 N を増加すれば、各共振点の間隔は狭くなる。 T を増加すると透過損が増加し、共振の半値巾は増大する。 T と共振点の高さとの関係を3・5図に示す。すなわち、3・5図は $N=20$ のときの $(0, 0)$ および $(0, 1)$ モードの共振周波数において、透過率変化に対する輻射パワーの変化を示したものである。透過率を0から次第に増加してゆくと、輻射パワーが最大となる透過率がある。 $N=20$ の $(0, 0)$ モードでは、その透過率は0.51%。 $(0, 1)$ モードでは2.14%である。one transit 当りの透過損失は、その半分すなわちそれぞれ0.26%, 1.07%である。 $N=20$ のときのこれら

のモードの one transit 当りの回折損失が、それぞれ 0.30%, 1.56% であるから、(0, 0) モードではほぼ透過損失と回折損失が等しいところで輻射パワーが最大となっているが、(0, 1) モードではこのようになっていない。しかし、(0, 1) モードの場合、3・5 図の (0, 1) に相当する曲線は、極大値付近の変化が非常に緩かであるために、T が増加すると近似が悪くなることを考慮すると、余り確かなことはいえない。

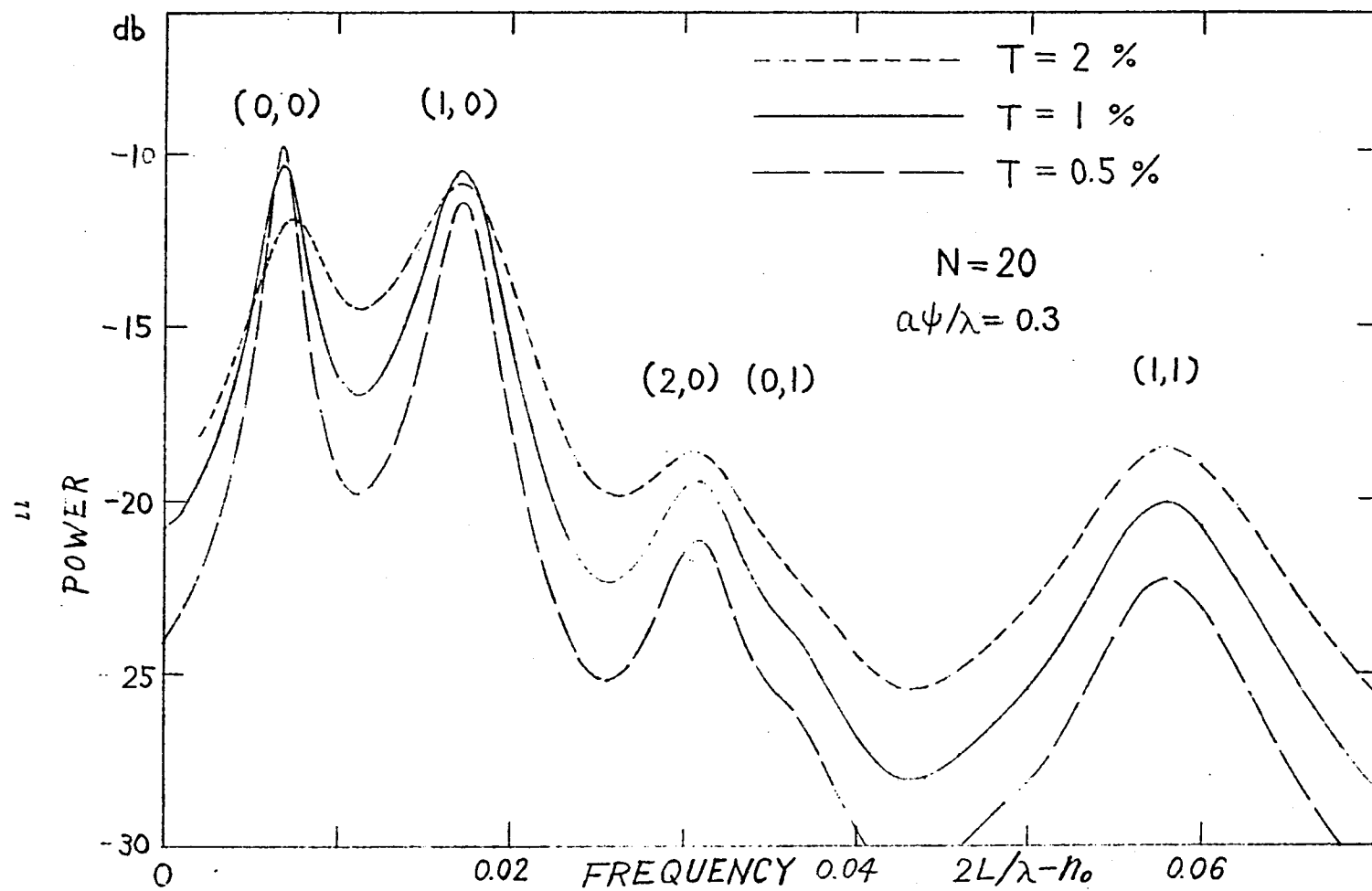
次に傾斜入射の場合の励振曲線を示す。3・6 図は傾斜角 ψ をパラメータとして示し、3・7 図は透過率 T をパラメータとして示す。横軸および縦軸は 3・4 図と同じものである。共振の周波数に対応するモード名を、記号 (ℓ, m)



3・5 図 透過率とパワーの関係



3・6図 励振特性，平面波の傾斜入射，傾斜角をパラメータとする

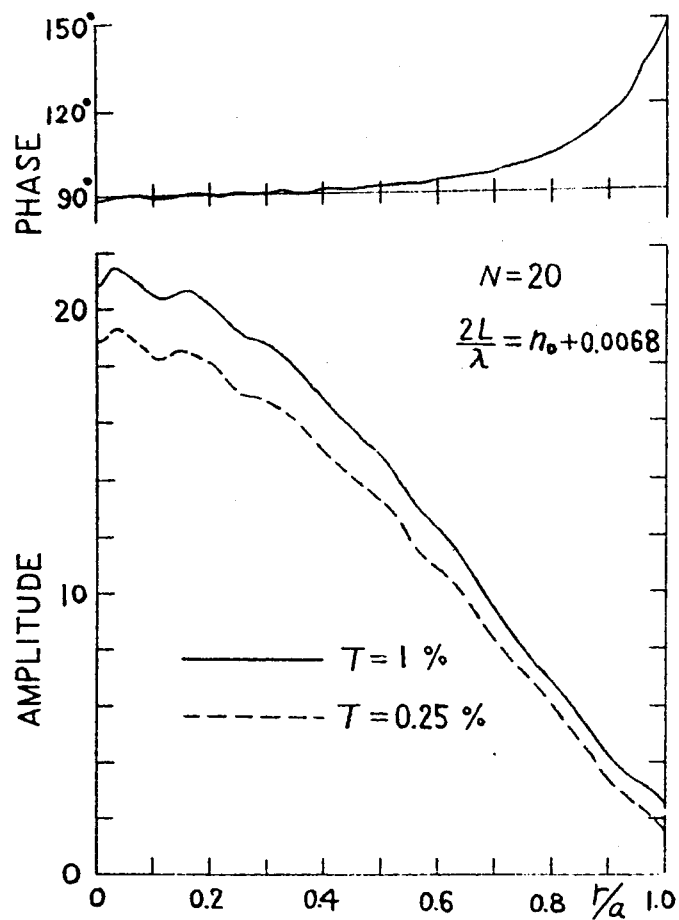
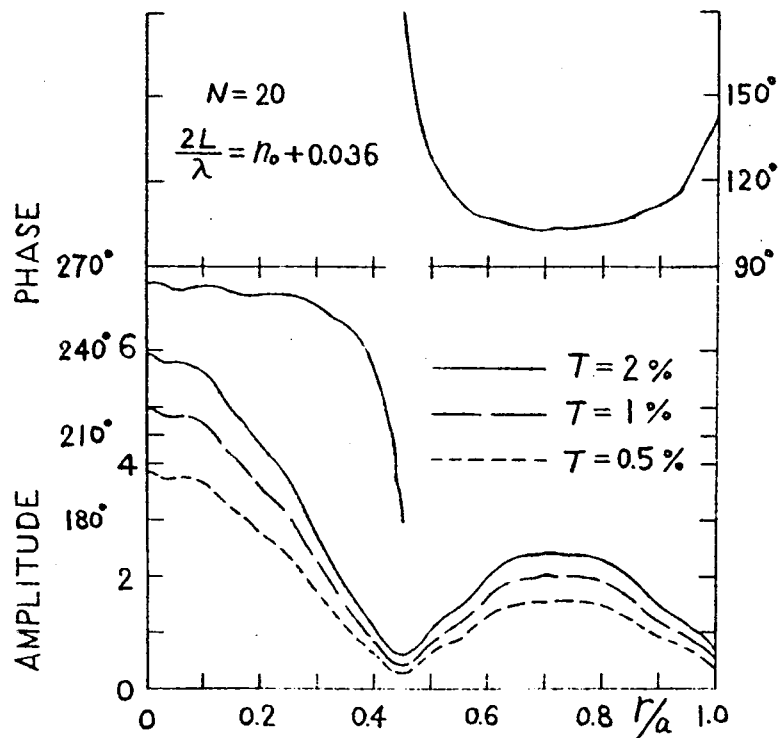


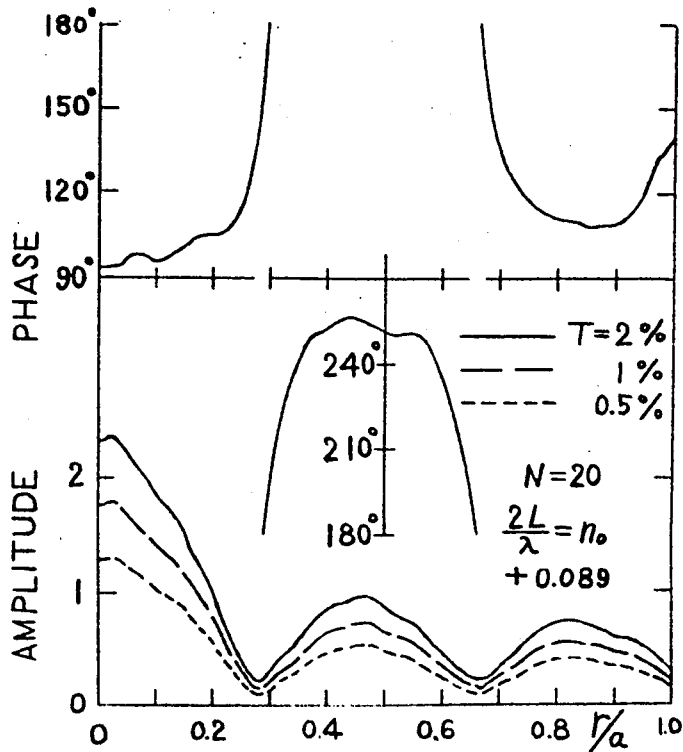
3・7図 励振特性，平面波の傾斜入射，透過率をパラメータとする

で図中に記入した。平面波の鏡への入射角が ψ であるが、ここでは傾斜のパラメータとして $a\psi/\lambda$ を選んだ。 $a\psi/\lambda$ の値は、鏡の中心と鏡の縁端とで、入射平面波の位相が何波長ずれているかを示す。傾斜入射の場合($\psi \neq 0$)、(3・58)によりすべての ℓ のモードが励起される。数値計算の際は、比較の入射角は小さいとして、 ℓ に関して0~4を考慮した。 n に関しては n_0 のみを考慮した。 n_0 のみで近似した理由は、励振曲線は、共振点の付近の周波数では、 n_0 のみで十分良く近似できること、および入射角を大きくしてゆくに つれて、 $\ell=0$ のモードの非共振周波数帯に、 $\ell \neq 0$ のモードの共振が生じて、その付近の周波数においても、 n_0 のみで十分良く近似できることのためである。すなわち傾斜入射の場合励振され得るモードが多くて、そのために、 n_0 のみで近似して誤差の少ない周波数範囲が広い。3・6図を見ると、入射角が大きくなるとともに、 ℓ に関して高次のモードが励振されやすくなる様子が分る。(2, m)モードと(0, m+1)モードの共振周波数は比較的近いところにあるために、入射角が小さい場合は(0, m+1)モードの共振がおこり、入射角が大きくなると(2, m)モードが主となる。この様子は後に示す場の分布を見ればより判然とする。3・6図に示した小さな入射角では、 $\ell=3$ 以上のモードは励振されていない。入射角が大きくなるとともに、 ℓ に関する低次モードの励振が押えられて、高次のモードが励振されやすくなることは、Koppelman³⁵⁾の実験で実証されている。3・7図を見ると、共振の際には透過損失と回折損失がほぼ等しいところで輻射パワーは最大となるため、共振モードによって最大パワーを輻射する透過率は異なっている。しかし非共振の際には、透過率の差がそのまま輻射パワーの差になっている。すなわち $T=2\%$ と 1% の曲線の差が3 db弱、 $T=1\%$ と 0.5% のそれらの差も3 db弱となっている。

3・8図に、垂直入射の際の、共振器内部 $z=L^*$ の鏡面上における場の分布を、振幅分布と位相分布とに分けて、 T をパラメータとして示す。フレネル数 N は20である。平面波の垂直入射のため、分布は $\ell=0$ の回転対称性を有するので、動径方向の分布のみを示す。図a, b, cの順に、(0, 0), (0, 1), (0, 2)の共振点における周波数での分布である。数値計算の際の n

* 境界条件から、本来、 $z=L$ では場の値は0である。ここでは、第2章同様、 $z=L-\lambda/4$ における場の分布を、簡単に $z=L$ における場の分布と呼んでいる。

3・8図a 垂直入射の場の分布 $(0,0)$ モード3・8図b 垂直入射の場の分布 $(0,1)$ モード



3・8 図 c 垂直入射の場の分布 (0, 2) モード

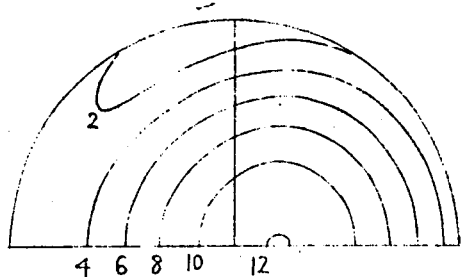
に関する和については、 $n > n_0$ を 20 項、 $n \leq n_0$ を 20 項の合計 40 項を考慮した。特定の周波数、透過率のパラメータに対して、この倍の合計 80 項を用いて計算し、収束していることを確かめた。 $z = 0$ の鏡面上での場の分布は収束が悪くて、求めることができなかった。これに反して、 $z = L$ の鏡面上では n からの寄与と $n + 1$ からの寄与がほぼ相殺して、 n_0 のみで大略の場の分布が定まり収束がよい。 $n \neq n_0$ の項は、フレネル数に特有の細かいリップルに寄与するものである。3・8 図の振巾分布は、第 2 章の強制励振の場合のそれら (2・9 図) とよく似た曲線となっているが、3・8 図ではリップルがかなり滑らかになっている。これは、第 2 章における鏡面の一部での励振と異なり、本章では平面波が鏡全面に入射するためと考えられる。図 a の振巾分布では、 $T = 0.5\%$ の曲線を省略したが、この曲線は $T = 1\%$ のそれと殆んど重なってしまう。ただ鏡の端において $T = 1\%$ のその振巾が大きい。図 a では、輻射

パワーの場合と同様に、 ψ 回折損失と透過損失の等しくなるTの値で、鏡の中心での振巾分布は最大となっている。図bおよびcでは、 ψ 振巾分布の形は相似であるが、Tの順に振巾が大きくなっている。Tの順になるのは、図b、cに示した(0, 1), (0, 2)モードでは、図に示した場合の透過損失よりも回折損失が大きいためである。

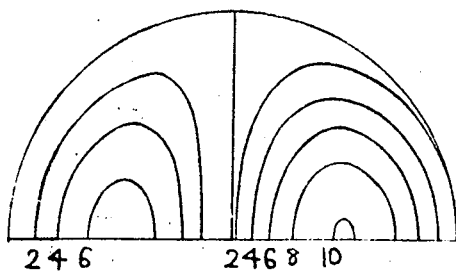
3・8図の位相分布においては、図a, b, cともにTが異なっても殆んど同じ分布をしているので、ある特定のTに対する分布曲線のみを示す。鏡の端での位相が中心に比べて遅れているのは、2・6図と同様であるが、図b, cでは振巾分布の谷に対応する位相分布が2・6図とは異なる。これも励振面積の差のためと思われる。しかし振巾の小さいところでの位相は余り問題にはならない。鏡の中心における位相が 90° であるのは、共振状態を示している。

図の番号 パラメータ	a	b	c	d
N	2 0	2 0	2 0	2 0
T	1 %	1 %	1 %	1 %
$a\psi/\lambda$	0.3	0.3	0.3	0.3
周 波 数	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(0, 1)
図の番号 パラメータ	e	f	g	h
N	2 0	2 0	2 0	2 0
T	1 %	1 %	1 %	1 %
$a\psi/\lambda$	0.1	0.1	0.1	0.1
周 波 数	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(0, 1)
図の番号 パラメータ	i	j	k	ℓ
N	2 0	2 9	2 0	2 0
T	0.5 %	0.5 %	0.5 %	0.5 %
$a\psi/\lambda$	0.3	0.3	0.3	0.3
周 波 数	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(0, 1)
図の番号 パラメータ	m	n		
N	1 0	1 0		
T	1 %	1 %		
$a\psi/\lambda$	0.1	0.1		
周 波 数	(0, 0)	(1, 0)		

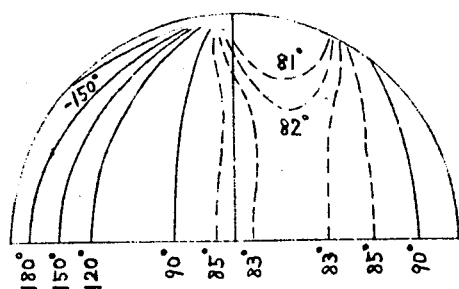
3・1表 3・9図a～nのパラメータ



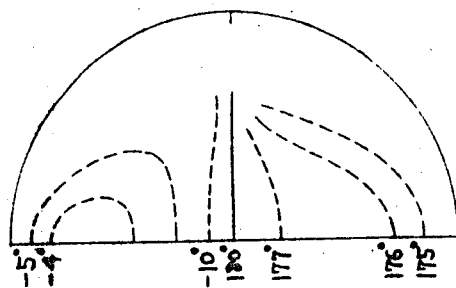
振 幅



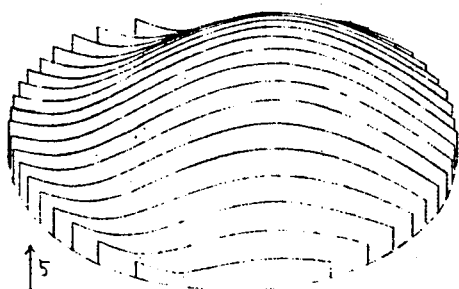
振 幅



位 相

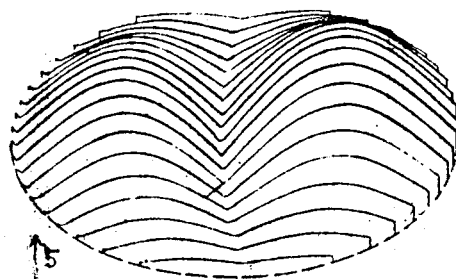


位 相



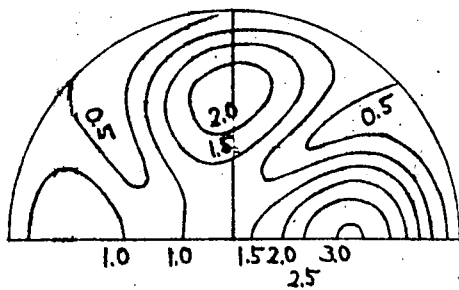
振幅 (立体図)

3・9 図 a 傾斜入射の場の分布
(0,0) モード共振周波数
 $N=20, T=1\%, a\psi/\lambda=0.3$

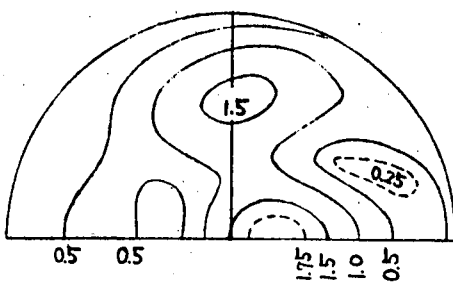


振幅 (立体図)

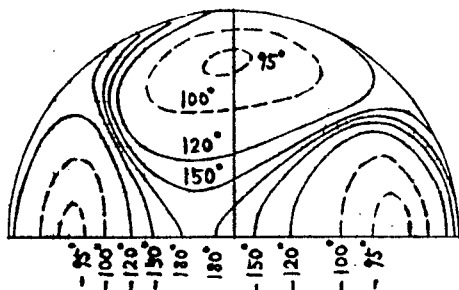
3・9 図 b 傾斜入射の場の分布
(1,0) モード共振周波数
 $N=20, T=1\%, a\psi/\lambda=0.3$



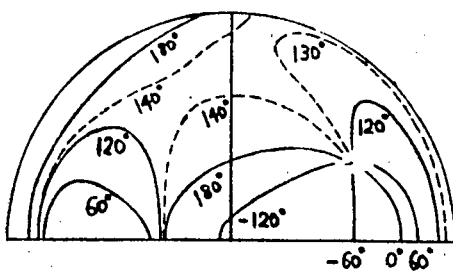
振 幅



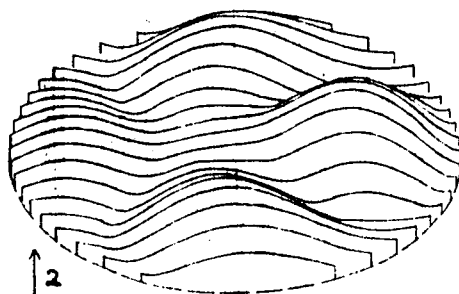
振 幅



位 相

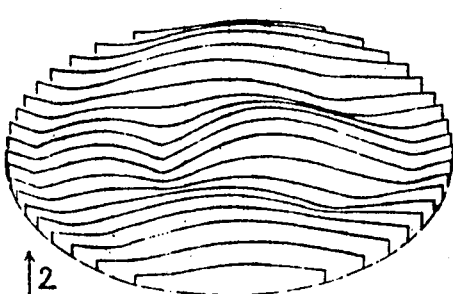


位 相



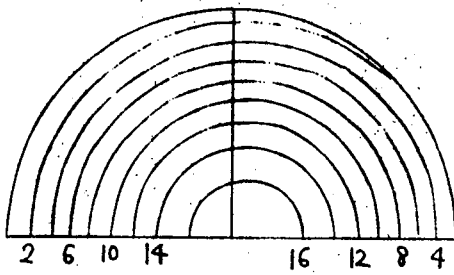
振幅 (立体図)

3・9 図 c 傾斜入射の場の分布
(2, 0) モード共振周波数
 $N=20, T=1\%, a\psi/\lambda=0.3$

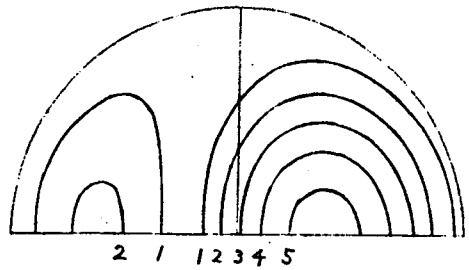


振幅 (立体図)

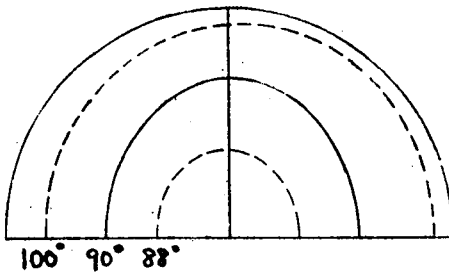
3・9 図 d 傾斜入射の場の分布
(0, 1) モード共振周波数
 $N=20, T=1\%, a\psi/\lambda=0.3$



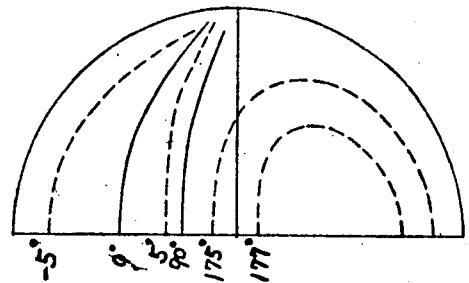
振 幅



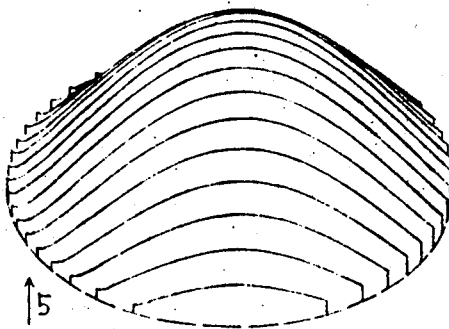
振 幅



位 相

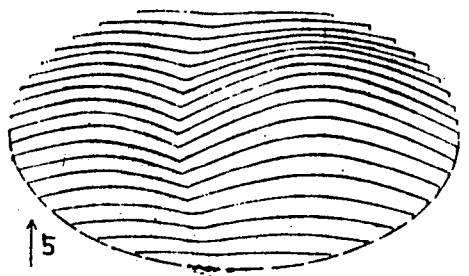


位 相



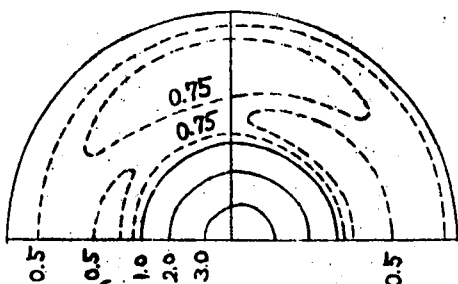
振幅 (立体図)

3・9 図 e 傾斜入射の場の分布
(0,0)モード共振周波数
 $N=20, T=1\%, a\psi/\lambda=0.1$

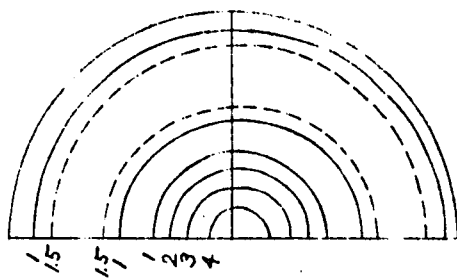


振幅 (立体図)

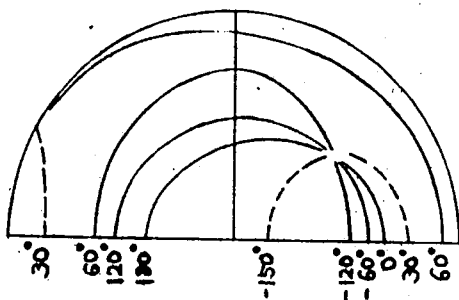
3・9 図 f 傾斜入射の場の分布
(1,0)モード共振周波数
 $N=20, T=1\%, a\psi/\lambda=0.1$



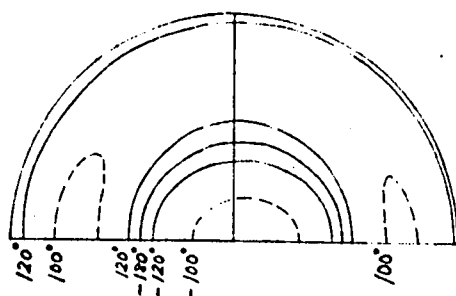
振 幅



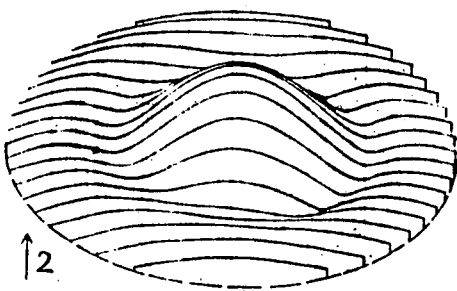
振 幅



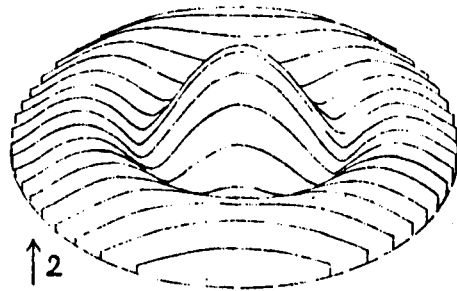
位 相



位 相



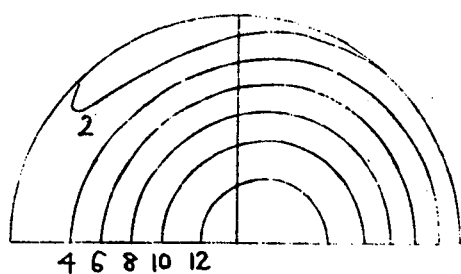
振幅 (立体図)



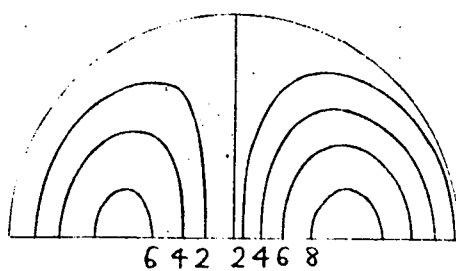
振幅 (立体図)

3・9 図 g 傾斜入射の場の分布
(2,0) モード共振周波数
 $N=20, T=1\%, a\psi/\lambda=0.1$

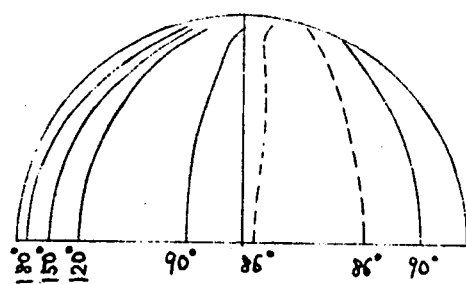
3・9 図 h 傾斜入射の場の分布
(0,1) モード共振周波数
 $N=20, T=1\%, a\psi/\lambda=0.1$



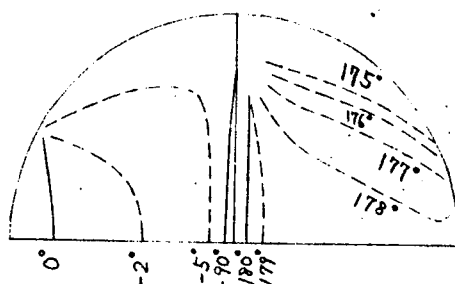
振 幅



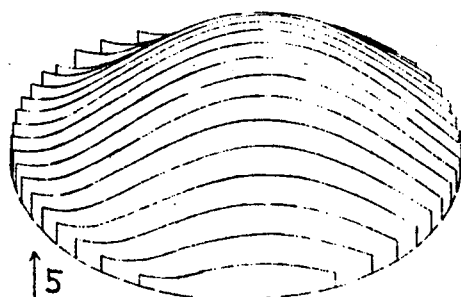
振 幅



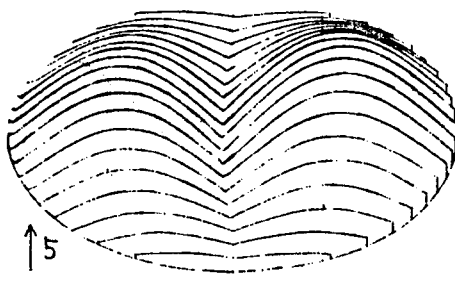
位 相



位 相



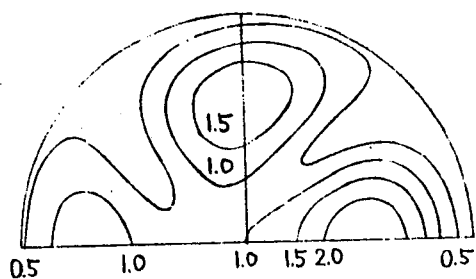
振幅 (立体図)



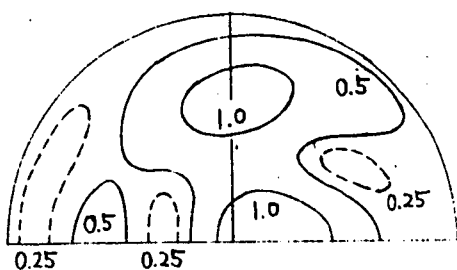
振幅 (立体図)

3・9 図 i 傾斜入射の場の分布
(0,0)モード共振周波数
 $N=20, T=0.5\%, a\psi/\lambda=0.3$

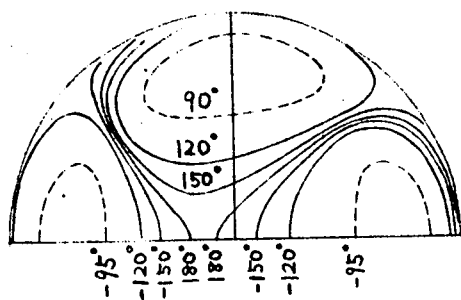
3・9 図 j 傾斜入射の場の分布
(1,0)モード共振周波数
 $N=20, T=0.5\%, a\psi/\lambda=0.3$



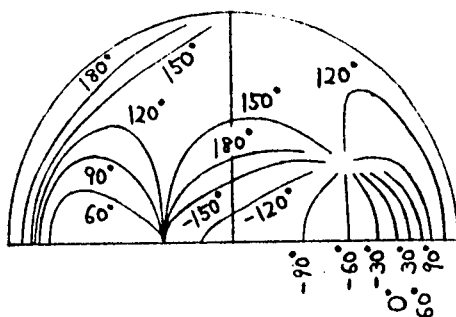
振 幅



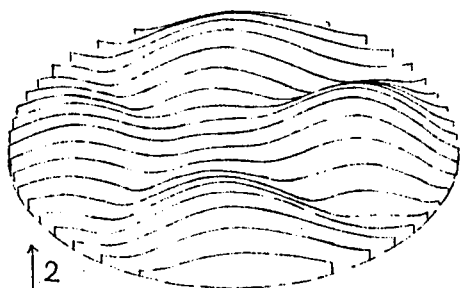
振 幅



位 相

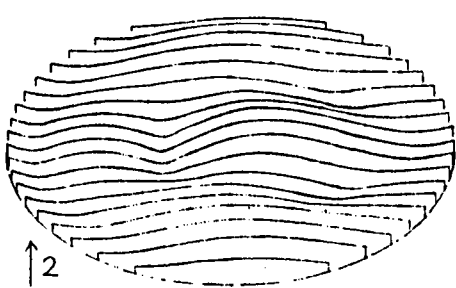


位 相



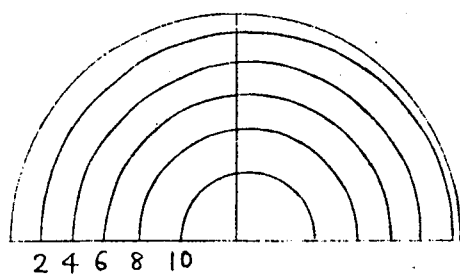
振幅 (立体図)

3・9 図k 傾斜入射の場の分布
(2,0)モード共振周波数
 $N=20, T=0.5\%, a\psi/\lambda=0.3$

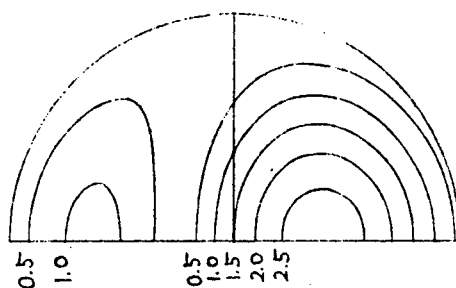


振幅 (立体図)

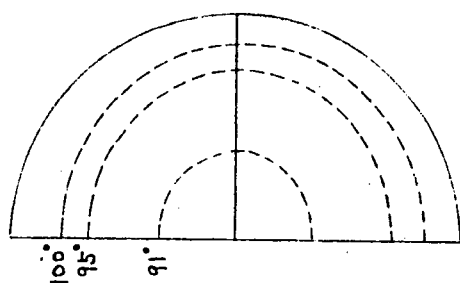
3・9 図ℓ 傾斜入射の場の分布
(0,1)モード共振周波数
 $N=20, T=0.5\%, a\psi/\lambda=0.3$



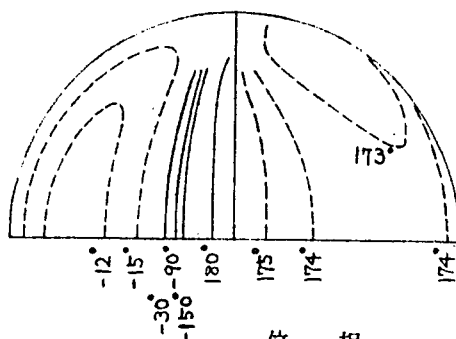
振 幅



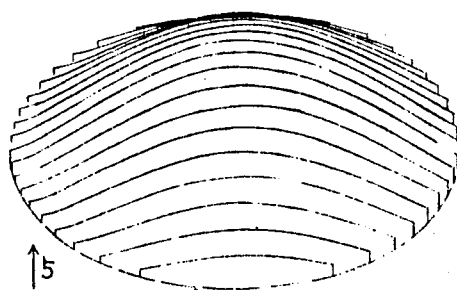
振 幅



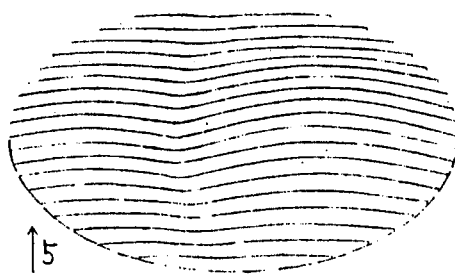
位 相



位 相



振幅 (立体図)



振幅 (立体図)

3・9 図 m 傾斜入射の場の分布
(0,0)モード共振周波数
 $N=10, T=1\%, a\psi/\lambda=0.1$

3・9 図 n 傾斜入射の場の分布
(1,0)モード共振周波数
 $N=10, T=1\%, a\psi/\lambda=0.1$

3・9図に傾斜入射の場合の場の分布を示す。この場合、入射波は回転対称性を失っているため、すべての ℓ のモードを励振する。3・9図の数値計算の際には、入射角が比較的小さい場合をとりあげて、励振曲線の計算のときと同様に、 ℓ は0～4を考慮した。また n は n_0 のみを考慮した。先述した如く、 $z=L$ の鏡面上での場の分布は、 $n \neq n_0$ の n の偶、奇からの寄与がほぼ相殺して、殆んど $n=n_0$ からの寄与のみで定まる。したがって、3・9図は $z=L$ の鏡面上での場の分布とみなしてよいが、細かいリップルは現れない。各図は、上より順に、等高線方式で示した振幅分布と位相分布、および一番下に振巾分布の立体図である。上下対称であるので、等高線方式で示した図は下半面を省略した。図a～nは、フレネル数 N 、透過率 T 、入射角 ψ および周波数を種々の値に選んだときの、場の分布である。対応するパラメータを3・1表に示す。表中の周波数の欄に記入した (ℓ, m) は、 (ℓ, m) モードの共振周波数の意味である。ここに示した共振周波数は、 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(0, 1)$ モードの場合である。 $(0, 0)$ および $(1, 0)$ モードの共振周波数は他の共振周波数から十分離れているために、図a, b, e, f, i, j, m, nに見る如く、それらのモードは判然としている。ただ、平面波は図に対する鉛直線から ψ だけ左側へ傾斜した方向から入射するために、モードの中心が右側にあるため左右非対称となっている。励振曲線のところでも述べたように、 $(2, 0)$ 、 $(0, 1)$ モードの共振周波数は近いために、それらの共振周波数では、入射角が小さいときは $(0, 1)$ モードが主となり、入射角の大きいときは $(2, 0)$ モードが主となる。すなわち、 $a\psi/\lambda=0.3$ の図c, dを比較すると、図cは $(2, 0)$ モードであることがはっきりしているが、図dは $(2, 0)$ と $(0, 1)$ モードが混合している。しかし、入射角の小さい($a\psi/\lambda=0.1$)図gを見ると、 $(2, 0)$ モードの共振周波数であるにもかかわらず、 $(0, 1)$ モードの分布をしている。同じ周波数で透過率の異なる図同志、すなわち図a, b, c, dと図i, j, k, ℓ を比較してみると、透過率の大、小の場の分布に及ぼす影響は、振巾の大きさ以外には殆んどない。振巾の極大値の付近では、対応する位相はほぼ一定であり、極小値の付近に対応する位相は急激に変化する。また隣り合った極大値に対応する位相は、 180° の位相差を有する。しかし、後者に関しては、 $(2, 0)$ 、 $(0, 1)$ モード

の混合した図dでは判然としていない。

第4章 有孔鏡共振器の励振

§4-1 序

レーザ共振器として用いられるファブリ・ペロー共振器においては、通常透過鏡を通して出力を取り出すのであるが、近年注目されている炭酸ガス・レーザでは、大出力かつ遠赤外域のために、適当な透過鏡の製作が困難であることなどにより、その出力を鏡の中心にある孔を通して取り出している。また、受動的なファブリ・ペロー共振器の励振方法としても、鏡の孔を通して波を入射させることが考えられる。本章では、このように鏡に同心の円孔を有する平行円板型ファブリ・ペロー共振器を解析する。

現在までに発表されている有孔鏡共振器の解析としては、平行円板型の場合にはLi, Zucker⁷⁸⁾の論文があり、また McCumber⁷⁹⁾は共焦点型をとりあげている。Li, Zuckerの論文は2通りの解析を示している。1つは、Fox, Li⁶⁾の電子計算機によるシミュレーションの方法を有孔鏡に適用したものであり、他は、Vainstein¹⁵⁾の方法をこの場合に拡張したものである。McCumberの論文は、孔のない共振器の干渉計理論による解析の結果に、孔が小さいとして摂動理論を適用したものである。なお、文献78)、79)はいずれも両鏡に同じ大きさの孔があるとして、解析したものである。

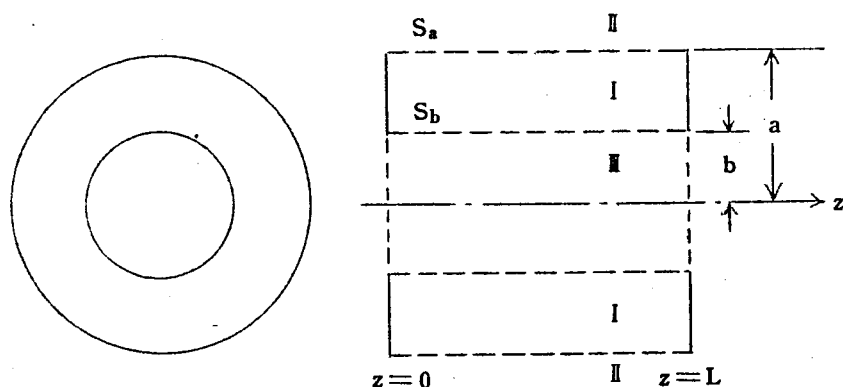
ここで有孔鏡共振器の実用上の問題点を述べると、共焦点配置ではエネルギーが鏡の中心に集中するから、中心に孔をもつ鏡では損失が非常に大きくて実用化はされ難い。むしろ、平行平面配置またはそれに近い配置、すなわち鏡間距離が鏡の曲率半径に比べて十分小さい配置の方が実際上有用である。

本章では、第2章の理論を発展させた形で、平行円板鏡の中心に円孔を有するファブリ・ペロー共振器を取り扱う。第2章では、共振器を含む全空間を共振器内、外部の2領域に分けて、適当なグリーン関数で各領域内の場を記述し、仮想的に設けた境界面で両領域の場を接続するという方法を用いた。§4-2では、共振器の中心に孔があるため、上述の2領域の他に、この孔を含む領域を別に考える。この第3の領域は孔の外の共振器外部を含むから、ここでは自由空間のグリーン関数を使って場を記述する。そして、この領域の場と2枚の

平行平面鏡にはさまれた共振器内部の領域の場を、第2章と同じように、仮想的な境界面で接続する。問題設定は外部より平面波が孔のところに入射する励振問題として、それに対する有孔鏡共振器の基礎方程式を与える。§4・3では、励振源のない場合の解、すなわち自由振動をとりあげて、その回折損失、共振周波数、共振器内部の場の分布を示す。ところで、もっとも簡単な平行平面ファブリ・ペロー共振器の解析として、一次元の鏡、すなわち有限の幅をもち無限に長い矩形鏡がとりあげられることが多い。ここでは孔のある共振器の鏡の半径と孔の半径の差を一定に保ちつつ、両者を無限大に近づけることにより、このような特殊な鏡の共振器の解析も行う。§4・2、§4・3の解析は両方の鏡に孔のある場合であるが、§4・4では、一方の鏡にのみ孔のある場合について、その自由振動を調べる。一方の鏡にのみ孔のある場合の解析は、他には行われていない。§4・3、§4・4の解析の結果として、孔のある共振器では、角モード番号 ℓ に関して異なるモードが殆んど縮退状態にあることがわかる。すなわち、これらのモードの共振周波数、回折損失はほぼ等しい。

§4・2 基礎方程式

中心に半径 b の同心の孔を有する、2枚の半径 a の平面円板鏡を、間隔 L をへだてて、平行に配置した共振器を考える。(4・1図)。外部よりこの共振



4・1図 有孔ファブリ・ペロー共振器

器の孔を通して波が入射するものとする。共振器の開口面に仮想的な境界面を考へて、全空間を3つの領域に分ける。すなわち、4・1図に示すように $r = a$ および $r = b$ に境界面 S_a および S_b を考へて、共振器内部の空間を領域Ⅰ、 $r = a$ より外側の空間を領域Ⅱ、 $r = b$ より内側すなわち孔の存在する空間を領域Ⅲと名付ける。領域Ⅲは共振器の外側をも含んでいて、領域Ⅰと接しているわけであるが、ここでは鏡の寸法は波長に比べて十分大きいと考へて、領域ⅠとⅡの境界を定義せず、そこにおける場の結合を考へしないこととする。

第2章と同様に、共振器内部の鏡面上で場が0となるDirichlet境界条件を満たすHelmholtz波動方程式の解を求めゐる。領域Ⅰでは(2・7)で定義される、鏡面上で0となる境界条件を満たすグリーン関数 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ を用い、領域ⅡとⅢでは、有限の距離のところに境界条件が存在しないから、(2・12)で定義される自由空間のグリーン関数 $H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ を用いて場を記述する。すなわち、領域Ⅰでは境界面が S_a と S_b と2つあるから、場は

$$\begin{aligned} \varphi_I(\mathbf{r}) = & \int_{S_a} \left[G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial r'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial r'} \varphi(\mathbf{r}') \right] dS \\ & - \int_{S_b} \left[G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial r'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial r'} \varphi(\mathbf{r}') \right] dS \end{aligned} \quad (4 \cdot 1)$$

と表わせる。領域Ⅱでは、第2章とまったく同様にして、

$$\varphi_{II}(\mathbf{r}) = - \int_{S_a} \left[H(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial r'} - \frac{\partial H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial r'} \varphi(\mathbf{r}') \right] dS \quad (4 \cdot 2)$$

と表わせる。領域Ⅲには、入射波 $e^{ikz} u(r, \theta)$ が存在するとして、場を次のように表わす。

$$\varphi_{III}(\mathbf{r}) = e^{ikz} u(r, \theta) + \int_{S_b} \left[H(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial r'} - \frac{\partial H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial r'} \varphi(\mathbf{r}') \right] dS \quad (4 \cdot 3)$$

以下第2章と同様にして、境界面で場をなめらかに接続して、境界面上の未知関数に対する連立積分方程式を得る。これを解くために、境界面上の場とその法線微係数を直交関数系で展開して、積分方程式をその展開係数に対する連立無限次元の一次方程式に帰着させる。第2章では境界面は1個であったが、本章では2個であるので、連立方程式の数は第2章に比べて2倍になる。まず、境界面上で、両領域の場の値とその法線微係数を等置する。 $r = a$ の S_a 上に

おいては

$$\varphi_I(a-0) = \varphi_{II}(a+0) \quad (4 \cdot 4)$$

$$\frac{\partial \varphi_I(a-0)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_{II}(a+0)}{\partial r} \quad (4 \cdot 5)$$

とおき, $r = b$ の S_b 上においては次式のようにおく。

$$\varphi_I(b+0) = \varphi_{II}(b-0) \quad (4 \cdot 6)$$

$$\frac{\partial \varphi_I(b+0)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_{II}(b-0)}{\partial r} \quad (4 \cdot 7)$$

(4・1) ~ (4・3) の各領域における場を (4・4) ~ (4・7) に用いると, S_a , S_b 上における場とその法線微係数の合計4個の未知関数に関する積分方程式となる。ここで4個の未知関数を, 次のように完全直交系で展開する。 S_a 上での展開は

$$[\varphi] = \sum_{r=a} b_{n\ell, \pm}^{\pm} \cdot \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \ell\theta \right\} \quad (4 \cdot 8)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=a} = \frac{1}{a} \sum_{n, \ell, \pm} a_{n\ell}^{\pm} \cdot \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \ell\theta \right\} \quad (4 \cdot 9)$$

とし, S_b 上での展開は

$$[\varphi] = \sum_{r=b} d_{n\ell, \pm}^{\pm} \cdot \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \ell\theta \right\} \quad (4 \cdot 10)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=b} = \frac{1}{b} \sum_{n, \ell, \pm} c_{n\ell}^{\pm} \cdot \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \ell\theta \right\} \quad (4 \cdot 11)$$

とする。 $a_{n\ell}^{\pm}$, $b_{n\ell}^{\pm}$, $c_{n\ell}^{\pm}$, $d_{n\ell}^{\pm}$ は未知の展開係数であり, +および-はそれぞれ { } 内の $\cos \ell\theta$ および $\sin \ell\theta$ に対応する。

(4・8) ~ (4・11) の展開と (2・7), (2・12) の円筒座標表示のグリーン関数を用いると, (4・4) ~ (4・7) の積分方程式は次の連立無限次元の一次方程式に帰着する。

$$\begin{aligned} & J_{\ell}(\Lambda_n) H_{\ell}(\Lambda_n) a_{n\ell}^{\pm} - \Lambda_n J_{\ell}(\Lambda_n) H'_{\ell}(\Lambda_n) b_{n\ell}^{\pm} \\ & - J_{\ell}(\bar{\Lambda}_n) H_{\ell}(\Lambda_n) c_{n\ell}^{\pm} + \bar{\Lambda}_n J'_{\ell}(\bar{\Lambda}_n) H_{\ell}(\Lambda_n) d_{n\ell}^{\pm} \\ & + 8N \sum_m \{ K_{nm} a_{m\ell}^{\pm} - L_{nm} b_{m\ell}^{\pm} \} = 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 12)$$

$$\begin{aligned}
& A_n J'_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_{n\ell}^\pm - A_n^2 J'_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_{n\ell}^\pm \\
& - A_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) c_{n\ell}^\pm + A_n \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) d_{n\ell}^\pm \\
& + 8N \sum_m \{ M_{nm} a_{m\ell}^\pm - N_{nm} b_{m\ell}^\pm \} = 0
\end{aligned} \tag{4 \cdot 13}$$

$$\begin{aligned}
& J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) a_{n\ell}^\pm - A_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) b_{n\ell}^\pm \\
& - J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(\bar{A}_n) c_{n\ell}^\pm + \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(\bar{A}_n) d_{n\ell}^\pm \\
& - 8\bar{N} \sum_m \{ \bar{K}_{nm} c_{m\ell}^\pm - \bar{M}_{nm} d_{m\ell}^\pm \} = \phi_{n\ell}^\pm
\end{aligned} \tag{4 \cdot 14}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) a_{n\ell}^\pm - A_n \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) b_{n\ell}^\pm \\
& - \bar{A}_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(\bar{A}_n) c_{n\ell}^\pm + \bar{A}_n^2 J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(\bar{A}_n) d_{n\ell}^\pm \\
& - 8\bar{N} \sum_m \{ \bar{L}_{nm} c_{m\ell}^\pm - \bar{N}_{nm} d_{m\ell}^\pm \} = \psi_{n\ell}^\pm
\end{aligned} \tag{4 \cdot 15}$$

(4 \cdot 12) \sim (4 \cdot 15) を第4章の基礎方程式と呼ぶ。ただし A_n , \bar{A}_n は

$$A_n^2 \equiv (ka)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L} \right)^2 \tag{4 \cdot 16}$$

$$\bar{A}_n^2 \equiv (kb)^2 - \left(\frac{n\pi b}{L} \right)^2 = \left(A_n \frac{b}{a} \right)^2 \tag{4 \cdot 17}$$

で与えられるものであり, N , \bar{N} はそれぞれ鏡および孔のフレネル数, すなわち

$$N = \frac{a^2 n}{2L^2} \cong \frac{a^2}{L\lambda} \tag{4 \cdot 18}$$

$$\bar{N} = \frac{b^2 n}{2L^2} \cong \frac{b^2}{L\lambda} \tag{4 \cdot 19}$$

である。行列要素 K_{nm} , L_{nm} , M_{nm} , N_{nm} は (2 \cdot 29) \sim (2 \cdot 32) で定義されるもので, その詳細は付録2 \cdot 1にある。 \bar{K}_{nm} , \bar{L}_{nm} , \bar{M}_{nm} , \bar{N}_{nm} は, それぞれ, K_{nm} , L_{nm} , M_{nm} , N_{nm} の定義式 (2 \cdot 29) \sim (2 \cdot 32) において, 鏡の半径 a の代りに孔の半径 b を用いたものである。すなわち, K_{nm} , L_{nm} , M_{nm} , N_{nm} は最終的には鏡のフレネル数 N と A_n , A_m の関数であるが, これを明示して,

$$K_{nm} \equiv K_{nm}(A_n, A_m, N)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{nm} &\equiv L_{nm}(A_n, A_m, N) \\ M_{nm} &\equiv M_{nm}(A_n, A_m, N) \\ N_{nm} &\equiv N_{nm}(A_n, A_m, N) \end{aligned} \right\} (4 \cdot 20)$$

と表わすと, $\bar{K}_{nm}, \bar{L}_{nm}, \bar{M}_{nm}, \bar{N}_{nm}$ は次式を意味する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{nm} &\equiv K_{nm}(\bar{A}_n, \bar{A}_m, \bar{N}) \\ \bar{L}_{nm} &\equiv L_{nm}(\bar{A}_n, \bar{A}_m, \bar{N}) \\ \bar{M}_{nm} &\equiv M_{nm}(\bar{A}_n, \bar{A}_m, \bar{N}) \\ \bar{N}_{nm} &\equiv N_{nm}(\bar{A}_n, \bar{A}_m, \bar{N}) \end{aligned} \right\} (4 \cdot 21)$$

(4 · 14) および (4 · 15) の右辺の励振を表わす項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \phi_{n\ell}^{\pm} &= \frac{2\epsilon_{\ell}^2}{i\pi^2 bL} \int_0^L \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\} e^{ikz} u(a, \theta) b d\theta dz \\ &\cong \frac{\epsilon_{\ell}^2}{i\pi^3} \cdot \frac{[\exp\{i\pi(\frac{2L}{\lambda} - n)\} - 1]}{(\frac{2L}{\lambda} - n)} \cdot \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\} u(a, \theta) d\theta, \quad (4 \cdot 22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{n\ell}^{\pm} &= \frac{2\epsilon_{\ell}^2}{i\pi^2 bL} \int_0^L \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\} e^{ikz} \frac{\partial u(a, \theta)}{\partial r} b d\theta dz \\ &\cong \frac{\epsilon_{\ell}^2}{i\pi^3} \cdot \frac{[\exp\{i\pi(\frac{2L}{\lambda} - n)\} - 1]}{(\frac{2L}{\lambda} - n)} \cdot \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell\theta \right\} \frac{\partial u(a, \theta)}{\partial r} d\theta \quad (4 \cdot 23) \end{aligned}$$

である。ところで, (4 · 12) ~ (4 · 15) の基礎方程式は, ℓ および $+$, $-$ に関して分離していることに注目したい。すなわち基礎方程式は異なる ℓ および $+$, $-$ に関して独立に解けばよい。また, 行列要素 K_{nm} 等は, $n-m$ が奇数のときは 0 であるから, n, m の偶, 奇によっても方程式は分離している。

最後に数値計算例を示す。(4 · 3) の右辺第 1 項の $u(r, \theta)$ が

$$u(r, \theta) = 1 \quad (4 \cdot 24)$$

の場合, すなわち, 入射波が平面波 e^{ikz} の場合について, 励振特性を求める。このとき $u(r, \theta)$ は回転対称であるから, $\ell = 0$ のモードのみを励振する。

(4 · 22), (4 · 23) は

$$\phi_{n\ell}^{\pm} = \frac{2}{i\pi^2} \cdot \frac{[\exp\{i\pi(\frac{2L}{\lambda} - n)\} - 1]}{(\frac{2L}{\lambda} - n)} \cdot \delta_{\ell 0}, \quad (4 \cdot 25)$$

$$\psi_{n\ell} = 0 \quad (4 \cdot 26)$$

となる。開口面 S_a より輻射するパワーは (2・58) で与えられており、

$$P = \frac{1}{k} I_m \int_{S_a} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \frac{\pi L}{k} I_m \left(\sum_{n,\ell,\pm} \frac{b_{n\ell}^{\pm*} a_{n\ell}^{\pm}}{\varepsilon_\ell} \right) \quad (4 \cdot 27)$$

である。第2章と同様に、 A_n^2 を正でかつ最小とする n を n_0 とするとき、 \bar{N} が適当に大きい場合、 $n=n_0$ の項のみによって輻射パワーの概略が与えられる。その概略のパワーの計算結果、すなわち $I_m(a_{n_0 0} \cdot b_{n_0 0}^*)$ を 4・2 図に示す。このときのパラメータは $N=20$ 、 $b/a=0.5$ である。図中で $(0, m)$ で示された各モードを比較すると、輻射パワーは同じ程度であるが、低次モードほどピークは鋭く半値巾は小さい。すなわち、低次モードほど回折損失の小さいことを示している。

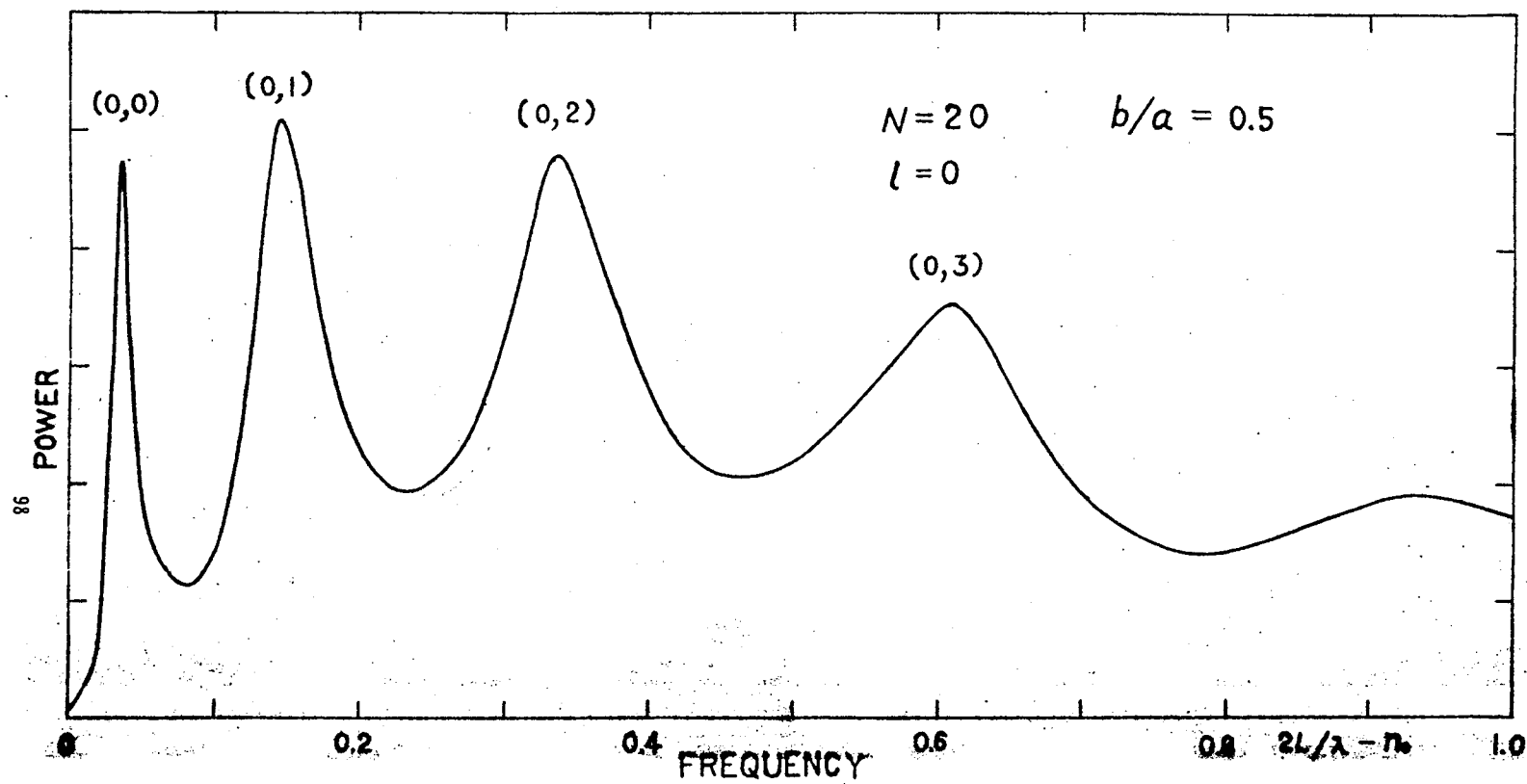
§4・3 自由振動モード

(1) 回折損失

本節では、前節の特殊な場合として無励振問題を取りあげて、自由振動モードを求める。自由振動モードは複素周波数平面での展開係数の極として定義される。すなわち、前節の基礎方程式において、励振源を表わす右辺を 0 とおいた斉次方程式を解く。0 でない解が存在するために左辺の係数のつくる行列式を 0 とおいて、その根として定義される自由振動の複素周波数を求める。この実数部より共振周波数、虚数部より回折損失が求まる。この解を、孔のある共振器を自由振動モードで解析している Li, Zucker⁷⁸⁾ の結果と比較する。

基礎方程式 (4・12) ~ (4・15) において右辺を 0 とおいた斉次方程式を解く。 K_{nm} , \bar{K}_{nm} ($n \neq m$) 等の非対角要素の値は、 K_{nn} , \bar{K}_{nn} 等の対角要素の値に比して十分小さいから、基礎方程式において $m \neq n$ なる m の項を無視する。このとき (4・12), (4・13) を行列形で書くと

$$\begin{pmatrix} J_\ell(A_n)H_\ell(A_n) + 8NK_{nn} & A_n J_\ell(A_n)H'_\ell(A_n) + 8NL_{nn} \\ A_n J'_\ell(A_n)H_\ell(A_n) + 8NM_{nn} & A_n^2 J'_\ell(A_n)H'_\ell(A_n) + 8NN_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ -b_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} J_\ell(\bar{A}_n)H_\ell(A_n) & \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n)H_\ell(A_n) \\ A_n J_\ell(\bar{A}_n)H'_\ell(A_n) & A_n \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n)H'_\ell(A_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ -d_n \end{pmatrix} \quad (4 \cdot 28)$$



4・2図 有孔共振器の励振特性

となり, (4・14), (4・15)は

$$\begin{pmatrix} J_\ell(\bar{A}_n)H_\ell(\bar{A}_n)+8\bar{N}\bar{K}_{nn} & \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n)H_\ell(\bar{A}_n)+8\bar{N}\bar{M}_{nn} \\ \bar{A}_n J_\ell(\bar{A}_n)H'_\ell(\bar{A}_n)+8\bar{N}\bar{L}_{nn} & \bar{A}_n^2 J'_\ell(\bar{A}_n)H'_\ell(\bar{A}_n)+8\bar{N}\bar{N}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ -d_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} J_\ell(\bar{A}_n)H_\ell(A_n) & A_n J_\ell(\bar{A}_n)H'_\ell(A_n) \\ \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n)H_\ell(A_n) & A_n \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n)H'_\ell(A_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ -b_n \end{pmatrix} \quad (4 \cdot 29)$$

となる。ここで a_n, b_n は $a_{n\ell}^\pm, b_{n\ell}^\pm$ を略記したものである。この略記法を採用したのは、基礎方程式が ℓ および $+$, $-$ に関して分離しているので、混乱が生じるおそれがないためである。(4・29)より $\begin{pmatrix} c_n \\ -d_n \end{pmatrix}$ を解いて(4・28)の右辺に代入すると次式を得る。

$$\begin{pmatrix} J_\ell(A_n)H_\ell(A_n)+8NK_{nn} & A_n J_\ell(A_n)H'_\ell(A_n)+8NL_{nn} \\ A_n J'_\ell(A_n)H_\ell(A_n)+8NM_{nn} & A_n^2 J'_\ell(A_n)H'_\ell(A_n)+8NN_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ -b_n \end{pmatrix} \\ = \frac{\bar{\mu}}{\bar{A}} \begin{pmatrix} \{H_\ell(A_n)\}^2 & A_n H_\ell(A_n)H'_\ell(A_n) \\ A_n H_\ell(A_n)H'_\ell(A_n) & \{A_n H'_\ell(A_n)\}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ -b_n \end{pmatrix} \quad (4 \cdot 30)$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \equiv & 8\bar{N} \{ [J_\ell(\bar{A}_n)]^2 \bar{N}_{nn} - \bar{A}_n J_\ell(\bar{A}_n) J'_\ell(\bar{A}_n) \{ \bar{L}_{nn} + \bar{M}_{nn} \} \\ & + \{ \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) \}^2 \bar{K}_{nn} \} \end{aligned} \quad (4 \cdot 31)$$

であり, \bar{A} は(4・28)の左辺の 2×2 行列の行列式である。すなわち次式で定義される。

$$\begin{aligned} \bar{A} \equiv & (8\bar{N})^2 \cdot (\bar{K}_{nn} \cdot \bar{N}_{nn} - \bar{L}_{nn} \cdot \bar{M}_{nn}) + 8\bar{N} \{ J_\ell(\bar{A}_n)H_\ell(\bar{A}_n)\bar{N}_{nn} \\ & - \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n)H_\ell(\bar{A}_n)\bar{L}_{nn} - \bar{A}_n J_\ell(\bar{A}_n)H'_\ell(\bar{A}_n)\bar{M}_{nn} \\ & + \bar{A}_n^2 J'_\ell(\bar{A}_n)H'_\ell(\bar{A}_n)\bar{K}_{nn} \} \end{aligned} \quad (4 \cdot 32)$$

(4・30)を解くと

$$\frac{A}{\mu} = \frac{\bar{\mu}}{\bar{A}} \quad (4 \cdot 33)$$

となる。ただし

$$\mu \equiv 8N \{ [H_\ell(A_n)]^2 N_{nn} - A_n H_\ell(A_n)H'_\ell(A_n) \{ L_{nn} + M_{nn} \} \}$$

$$+ \{A_n H'_\ell(A_n)\}^2 K_{nn} \quad (4 \cdot 34)$$

であり、 Δ は(4・30)の左辺の 2×2 行列の行列式である。すなわち、

$$\begin{aligned} \Delta \equiv & (8N)^2 (K_{nn} \cdot N_{nn} - L_{nn} \cdot M_{nn}) + 8N \{J_\ell(A_n) H_\ell(A_n) N_{nn} \\ & - A_n J'_\ell(A_n) H_\ell(A_n) L_{nn} - A_n J_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) M_{nn} \\ & + A_n^2 J'_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) K_{nn}\} \end{aligned} \quad (4 \cdot 35)$$

である。 $N, \bar{N} \gg 1/(4\pi)$ のとき、行列要素 K_{nn} 等のベキ展開式(A2・28) ~ (A2・31), および円筒関数のLommelの公式(2・76)により、

$$\frac{\Delta}{\mu} = \frac{J_\ell(A_n) H_\ell(A_n) + (1-i) \xi \alpha}{\{H_\ell(A_n)\}^2} \quad (4 \cdot 36)$$

$$\frac{\bar{\Delta}}{\bar{\mu}} = \frac{J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(\bar{A}_n) + (1-i) \xi \bar{\alpha}}{\{J_\ell(\bar{A}_n)\}^2} \quad (4 \cdot 37)$$

となる。(4・36), (4・37)を用いると(4・33)は次式のように簡単化される。

$$\begin{aligned} & J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) \{J_\ell(A_n) H_\ell(\bar{A}_n) - J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n)\} \\ & + (1-i) \xi \{\bar{\alpha} J_\ell(A_n) H_\ell(A_n) + \alpha J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(\bar{A}_n)\} = 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 38)$$

ただし、 $\xi, \alpha, \bar{\alpha}$ は次のように定義されるものである。

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) \cong 0.369, \quad (4 \cdot 39)$$

$$\alpha^2 \equiv \frac{1}{4\pi N}, \quad (4 \cdot 40)$$

$$\bar{\alpha}^2 \equiv \frac{1}{4\pi \bar{N}} = \alpha^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \quad (4 \cdot 41)$$

(4・38)の第2項は、第1項に比して、 α に関して1次だけ高次である。 $\alpha \ll 1$ であるから、第2項を補正項と考えて、まず第1項だけで(4・38)を A_n に関して解く。この解を $A_{\ell m}$ とする。すなわち $A_{\ell m}$ は次式を満たす。

$$J_\ell(A_{\ell m}) H_\ell\left(\frac{b}{a} A_{\ell m}\right) - J_\ell\left(\frac{b}{a} A_{\ell m}\right) H_\ell(A_{\ell m}) = 0 \quad (4 \cdot 42)$$

m は上式の $(m+1)$ 番目の根を意味する。これは最低次の根を $m=0$ とするためである。(4・42)は同軸線のT.Mモードのしゃ断波長を求める式と

同じである。^{*}これは、孔のあいた共振器の開口面 S_a および S_b を閉じたときに、共振器が同軸線型になっているためである。特に、フレネル数が大きくなると、次第に閉じた共振器のモードに近づく。つまり、 $A_{\ell m}$ は A_n のよい近似値になる。

(4・38) の第2項を補正項とみなして、そこでは A_n の代りに0次近似の $A_{\ell m}$ を用いると、(4・38) は次式となる。

$$\begin{aligned} & \left[J_{\ell}(A_n) H_{\ell}\left(\frac{b}{a} A_n\right) - J_{\ell}\left(\frac{b}{a} A_n\right) H_{\ell}(A_n) \right] \\ & + (1-i) \xi \alpha \left[\frac{a}{b} \cdot \frac{J_{\ell}(A_{\ell m})}{J_{\ell}\left(\frac{b}{a} A_{\ell m}\right)} + \frac{J_{\ell}\left(\frac{b}{a} A_{\ell m}\right)}{J_{\ell}(A_{\ell m})} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 43)$$

(4・43) の第1項にテイラー展開を使って解を求める。ここで

$$\frac{d}{dA} \left[J_{\ell}(A) H_{\ell}\left(\frac{b}{a} A\right) - J_{\ell}\left(\frac{b}{a} A\right) H_{\ell}(A) \right]_{A=A_{\ell m}} = \frac{2i}{\pi A_{\ell m}} \left(R - \frac{1}{R} \right) \quad (4 \cdot 44)$$

ただし

$$R \equiv \frac{J_{\ell}(A_{\ell m})}{J_{\ell}\left(\frac{b}{a} A_{\ell m}\right)} \quad (4 \cdot 45)$$

であることを用いると、求める解は

$$A_n \cong A_{\ell m} \left[1 - \frac{(1+i) \xi \pi \alpha}{2} \cdot \frac{1 + \frac{a}{b} R^2}{1 - R^2} \right] \quad (4 \cdot 46)$$

で与えられる。(4・46) と (4・16) より波数 k が求まり、その虚数部より光が鏡間距離 L だけ進行するときの回折損失、すなわち one transit loss δ_d が次式で求まる。

$$\delta_d \equiv 1 - |e^{ikL}|^2 \quad (4 \cdot 47)$$

$\delta_d \ll 1$ のときは (4・47) を展開して、波数 k と A_n の関係式 (2・50)、すなわち

^{*} モード番号に関しては、同軸線では $m=1$ から始めるが、ファブリ・ペロー共振器では慣用にしがって $m=0$ から始める。

$$A_n^2 \cong 4\pi^2 N \left(\frac{kL}{\pi} - n \right) \quad (4 \cdot 48)$$

を用いて、次の近似式が成立する。

$$\begin{aligned} \delta_d \cong -2L \operatorname{Im}(k) &= 2\xi\pi\alpha^3 A_{\ell m}^2 \cdot \frac{1 + \frac{a}{b}R^2}{1 - R^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3\pi^2} + \frac{1}{8\pi} \right) N^{-3/2} A_{\ell m}^2 \cdot \frac{1 + \frac{a}{b}R^2}{1 - R^2} \end{aligned} \quad (4 \cdot 49)$$

回折損失が $N^{-3/2}$ に比例するのは、平行平面鏡ファブリ・ペロー共振器の特徴である。(4・46)の実数部から共振周波数を求めると

$$\frac{2L}{\lambda} - n = \frac{A_{\ell m}^2}{4\pi^2 N} \left[1 - \sqrt{2} \left(\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{8} \right) N^{-1/2} \cdot \frac{1 + \frac{a}{b}R^2}{1 - R^2} \right] \quad (4 \cdot 50)$$

となる。〔 〕内の第1項は、側面の閉じた同軸型共振器の共振周波数であり、第2項は、側面が開口であるための補正である。

ここで、Li, Zucker⁷⁸⁾が、Vainstein¹⁵⁾の理論を発展させて得た結果と比較する。(4・46)に相当する彼等の結果を、ここで使用している記号に書き換えると、

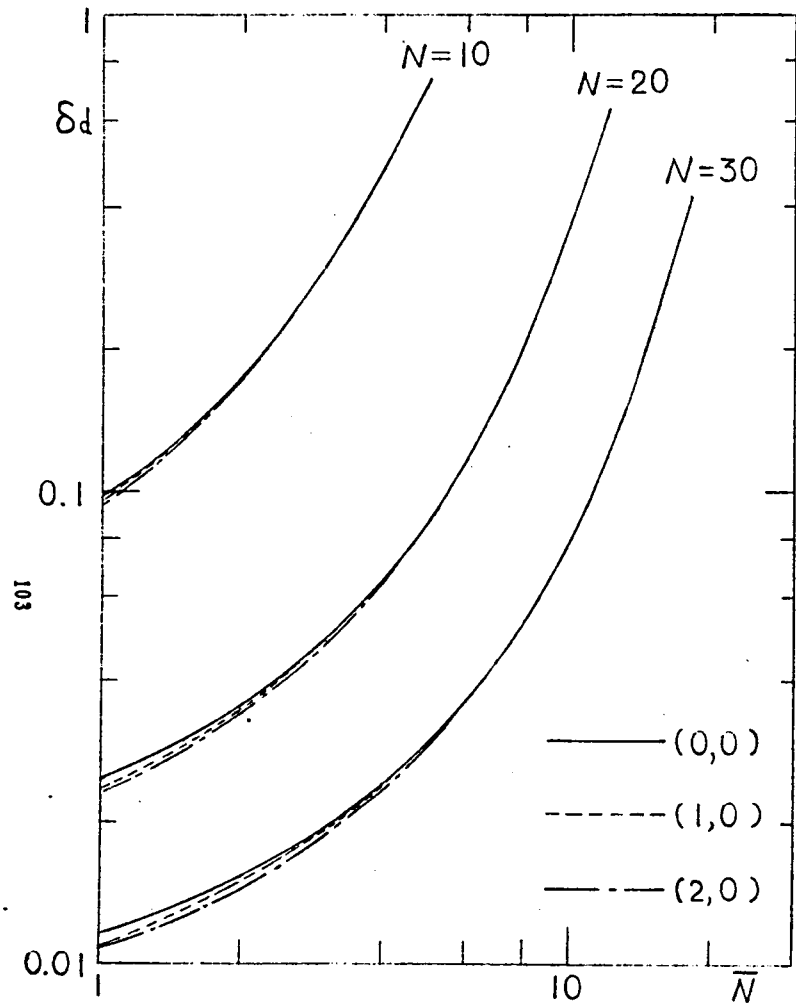
$$A_n = A_{\ell m} / \left[1 + 0.581(1+i)\alpha \cdot \frac{1 + \frac{a}{b}R^2}{1 - R^2} \right] \quad (4 \cdot 51)$$

である。(4・46)中

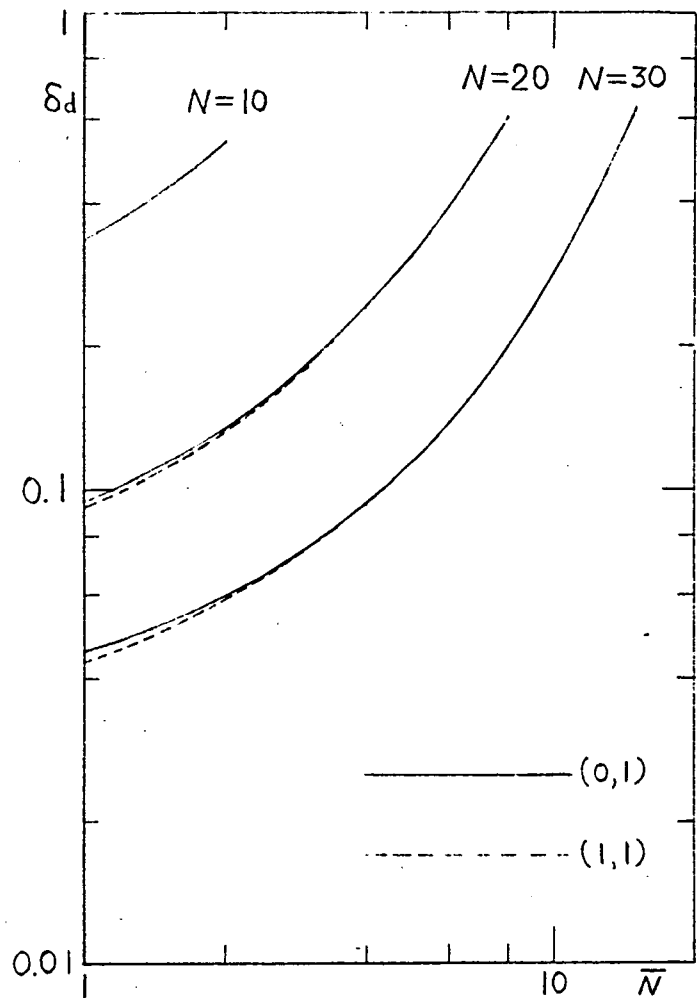
$$\xi\pi/2 = 0.580 \quad (4 \cdot 52)$$

であることから、両者は分母と分子の違い以外は、係数まで一致している。しかも著者も Li, Zucker も、これらの結果を出すために、 $\alpha \ll 1$ としてテイラー展開を使っていることを考えるならば、両者はまったく一致しているといえる。

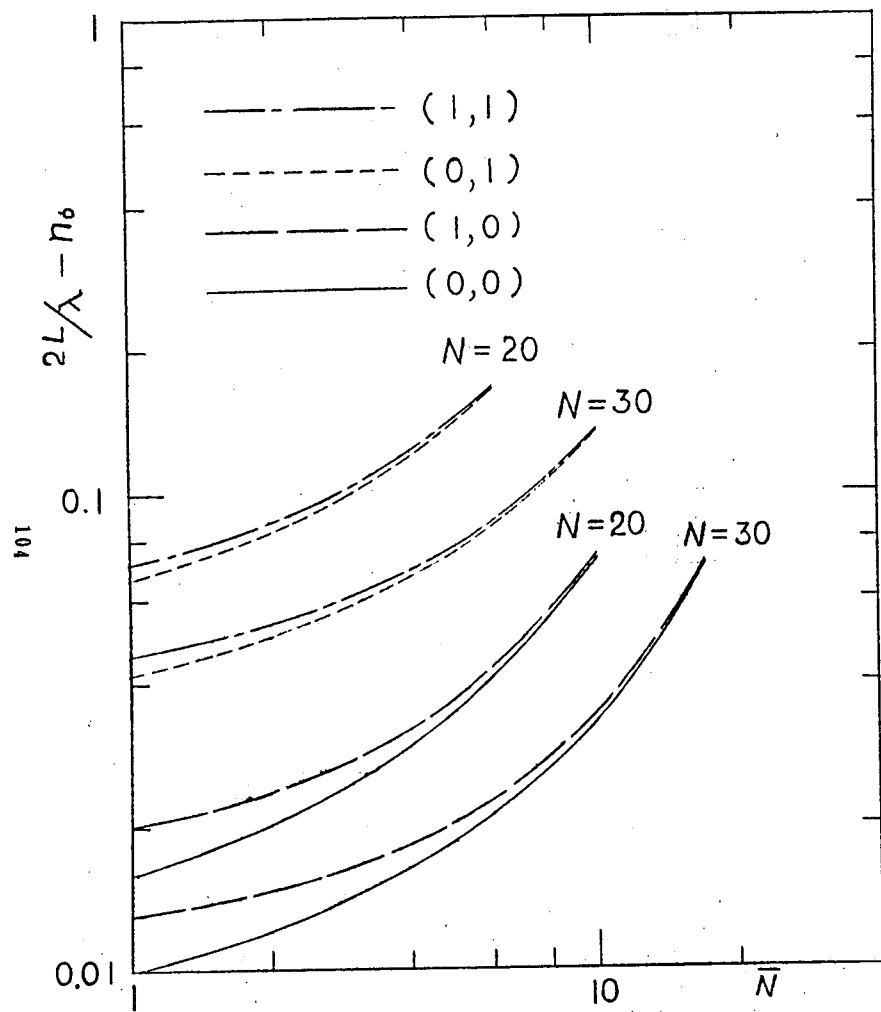
次に回折損失の数値例を示す。4・3図は、孔のフレネル数 \bar{N} に対する one transit loss δ_d を示す。図 a は $(\ell, 0)$ モード、図 b は $(\ell, 1)$ モードである。当然のことながら、孔が大きくなるほど損失は増加する。モード番



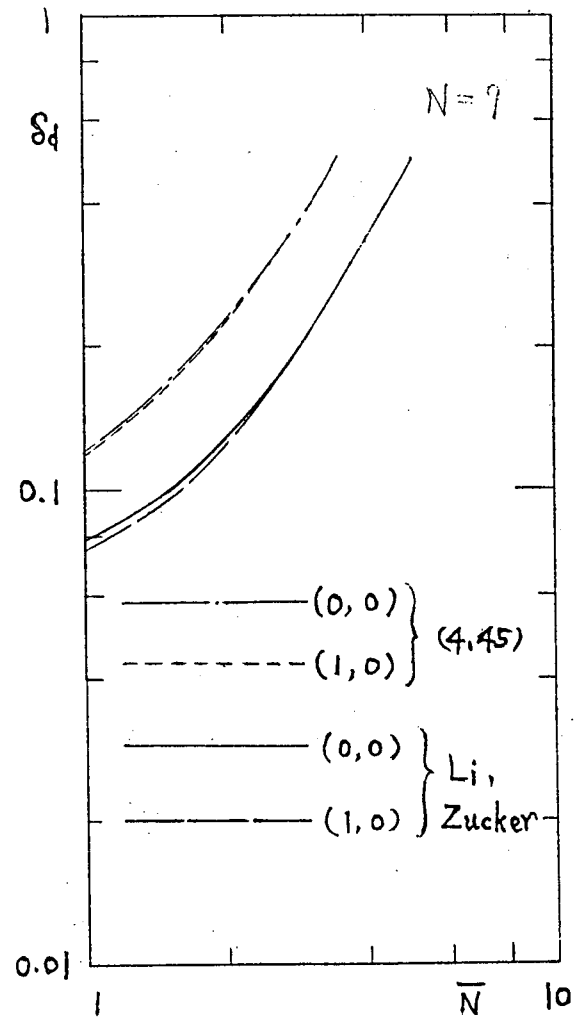
4・3 図 a 有孔共振器の回折損失



4・3 図 b 有孔共振器の回折損失



4.4 図 有孔共振器の共振周波数



4.5 図 回折損失, Li, Zucker との比較
N=9

号 (ℓ, m) の m が同じモードの損失は、ほぼ等しいという結果になっている。これは、数式的には、(4・49) の $A_{\ell m}$ 、および R の ℓ による差が殆んどないためである。4・4図は、孔のフレネル数 \bar{N} に対する共振周波数の変化を示す。ここでも4・3図と同様に、やはり (ℓ, m) の m が同じモードの共振周波数はほぼ等しい。(対数グラフにプロットしたため、 \bar{N} の小さいところで曲線の差が目立っているが、差の絶対値は小さい。) このことから、有孔鏡の共振器では、 (ℓ, m) の m の同じモードはほぼ縮退状態にあるといえる。中心に孔があるため、本来中心で振幅最大となる $\ell = 0$ のモードの損失が、孔のない鏡に比べて著しく増加して、このような結果になっている。このことは、後に示す様に、それらのモードの場の分布が、角度方向の分布を除いて、動径方向には殆んど同じ分布をしていることと符合している。損失に関するこの結果は、平行平面鏡配置に近い状態(鏡間距離が鏡の曲率半径に比べてかなり小さい鏡配置)の共振器を用いた炭酸ガス・レーザの実験において、 $\ell = 0$ のモードよりも $\ell = 1, 2$ のモードの方が発振しやすいという事実と一致すると考えられる。そのわけは、完全に両鏡が平行の場合に $\ell = 0, 1, 2$ のモードが殆んど同じ回折損失ならば、実験の際には両鏡が完全平行状態から多少ともずれてお互いに傾斜しているから、 $\ell = 1, 2$ のモードの方が $\ell = 0$ のモードよりも損失は小さくなって、発振しやすくなるからである。鏡が平行状態からずれると、 $\ell = 1, 2$ に比べて $\ell = 0$ のモードの損失が特に増加することについては、第5章で孔のない共振器に関して述べる。

4・5図には、Li, Zucker⁷⁸⁾ が計算機によるシミュレーションで求めた回折損失との比較を示す。(0, 0) モードより (1, 0) モードの方がわずかに損失の少ない点、および曲線の傾向は一致しているが、値には数十パーセントの差がある。これは(4・46) の A_n を求めたときに、テイラー展開による近似を行ったためである。鏡のフレネル数 N がもっと大きくて損失の少ないところでは、両者の一致はもっとよくなるはずである。しかし Li と Zucker のシミュレーションの方法は、 N が大きくなると収束が悪くなり、そのために行われていない。

(2) 共振器内部の場の分布

共振器内部の場の分布は、(4・1)に(4・8)～(4・11)の直交関数展開を用いて、

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{i\pi}{2} \sum_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \ell \theta \right\} \\ & \times \left[J_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \left\{ H_\ell(\Lambda_n) a_{n\ell}^\pm - \Lambda_n H'_\ell(\Lambda_n) b_{n\ell}^\pm \right\} \right. \\ & \left. - H_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \left\{ J_\ell(\bar{\Lambda}_n) c_{n\ell}^\pm - \bar{\Lambda}_n J'_\ell(\bar{\Lambda}_n) d_{n\ell}^\pm \right\} \right] \quad (4 \cdot 53) \end{aligned}$$

と表わせる。ここで基礎方程式(4・12)～(4・15)は、角モード ℓ および $+$ 、 $-$ に関して分離しているので、和は n に関してのみとった。以下では本節の最初で行ったように、 n に関して一項のみで近似する。(4・53)の〔 〕内の第2項を、(4・29)により c_n 、 d_n を消去して、 a_n 、 b_n で表わすと

$$J_\ell(\bar{\Lambda}_n) c_n - \bar{\Lambda}_n J'_\ell(\bar{\Lambda}_n) d_n = \frac{\bar{\mu}}{d} \{ H_\ell(\Lambda_n) a_n - \Lambda_n H'_\ell(\Lambda_n) b_n \} \quad (4 \cdot 54)$$

となる。これを(4・53)に用いると、動径方向の場の分布は次式に比例する。

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) \propto & J_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) - \frac{\bar{\mu}}{d} H_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \\ & \propto \left[H_\ell(\bar{\Lambda}_n) J_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) - J_\ell(\bar{\Lambda}_n) H_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \right] + \frac{(1-i)\xi\bar{\alpha}}{J_\ell(\bar{\Lambda}_n)} \cdot J_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \quad (4 \cdot 55) \end{aligned}$$

数値計算の際には、(4・55)の第1項では、 Λ_n として(4・46)を用いる。第2項では、第1項に比べて $\bar{\alpha}$ に関して一次高次であるから、 Λ_n として0次近似の(4・42)で定義される $\Lambda_{\ell m}$ を用いる。(4・55)の第1項だけを取り出して、 $\Lambda_n = \Lambda_{\ell m}$ とおくと、同軸線のTMモードの E_z 成分を表わす式となる。

場の分布を求める際に、(4・54)、(4・55)のようにまず c_n 、 d_n を消去する代りに、 a_n 、 b_n を先に消去してもよい。すなわち、(4・28)

により (4・53) の [] 内第 1 項を書き換えると

$$H_\ell(A_n)a_n - A_n H'_\ell(A_n)b_n = \frac{\mu}{d} \{ J_\ell(\bar{A}_n)c_n - \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n)d_n \} \quad (4 \cdot 56)$$

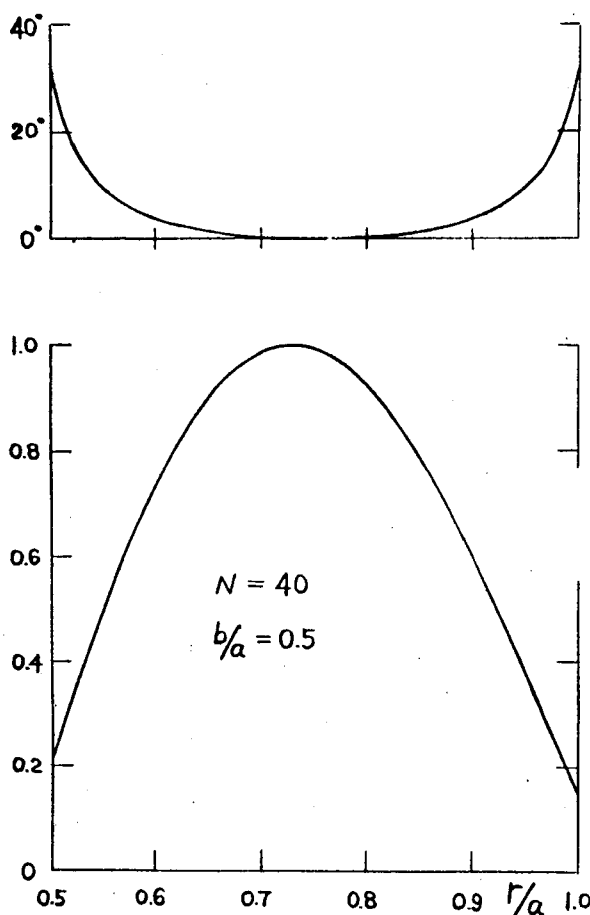
となる。これを用いて、(4・55) と同様にして、共振器内動径方向の場の分布を求めると、

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\propto \frac{\mu}{d} J_\ell(A_n \frac{r}{a}) - H_\ell(A_n \frac{r}{a}) \\ &\propto [H_\ell(A_n) J_\ell(A_n \frac{r}{a}) - J_\ell(A_n) H_\ell(A_n \frac{r}{a})] - \frac{(1-i)\xi\alpha}{H_\ell(A_n)} H_\ell(A_n \frac{r}{a}) \end{aligned} \quad (4 \cdot 57)$$

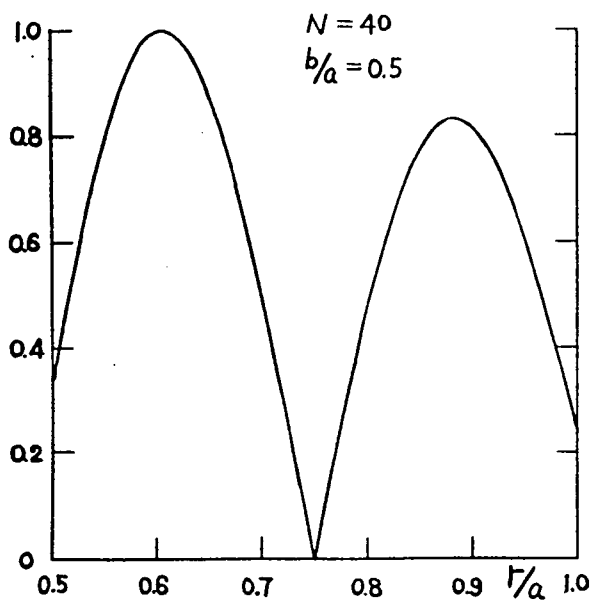
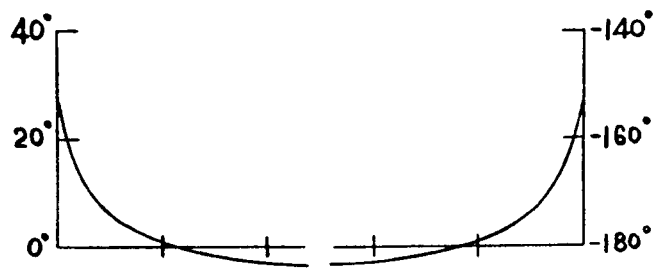
である。(4・55) と (4・57) の場の分布は、 $N, \bar{N} \rightarrow \infty$ ($\alpha, \bar{\alpha} \rightarrow 0$) の極限においては一致するが、 N, \bar{N} が有限の場合には両者は少しずれている。数値計算の結果では両者の振巾分布に大差はないが、位相分布は鏡の端 ($r = a, b$) の付近においてかなり差がある。しかし鏡の端では、振巾は小さくて、ここでの位相は余り問題にならない。両者の不一致の原因は、(4・46) で求めた A_n が近似解であるためである。低次モードに関するほど A_n の近似が良いため、両者の場の分布もよく一致している。

次に 4・6 図に、 $N=40$, $b/a=0.5$ の場合について、(4・55) で求めた共振器内部の動径方向の場の分布を示す。図は a, b, c, d, e の順に、それぞれ $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)$ モードである。 (ℓ, m) モードの ℓ は、角方向に $\cos \ell \theta$ で分布することを示し、 m は、動径方向 ($r=b$ から a) に $m+1$ 個の振巾の極大値をもつ分布であることを示す。各モードの振巾分布は、最高点の高さが 1 となるように規格化されている。また位相分布は、振巾分布の最高点で 0 となるように定められている。(4・55) で求めた 4・6 図と、(4・57) で求めた結果を比べてみると、振巾分布では両者の差は殆んど見分けられない。4・6 図では、 n に関しては 1 項のみをとりあげて計算したため、曲線はなめらかであるが、他の n の項を考慮すれば、この曲線を概略形として、その上にフレネル数に特有の細かいリップルが生じた曲線となるであろう。このような他の n を考慮する定式化に関しては後に述べる。フレネル数が増すほど、リップルは小さくなり、 n

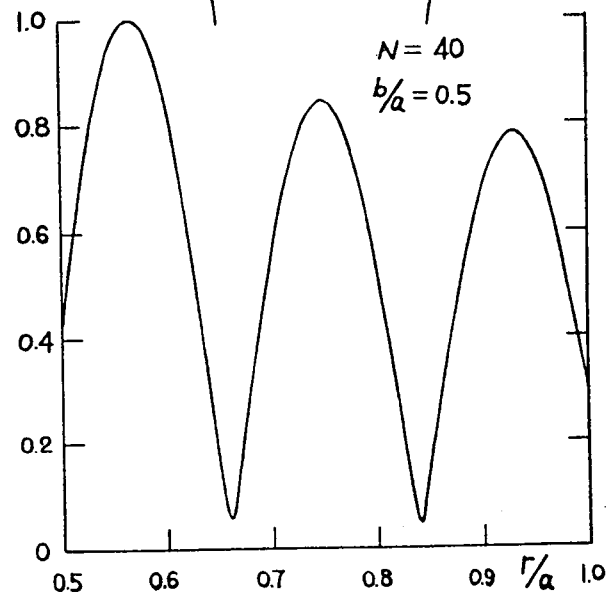
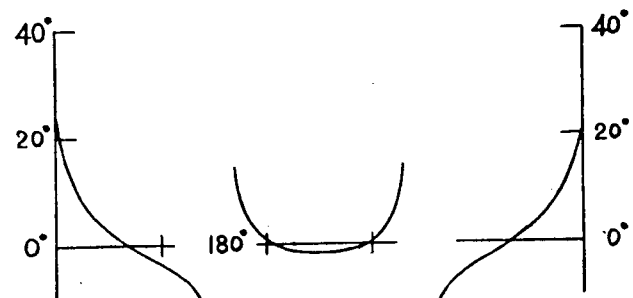
の一項のみで場の分布の概略形はより正しく表わされる。4・6図を見て分ることは、 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(2, 0)$ モードの場の分布は殆んど一致していることである。一般に、 (ℓ, m) モードの m の同じモードは動径方向の分布がほぼ等しい。動径方向の分布に関しては、 ℓ の異なるモードは本来中心付近の分布が異なることが特徴であるが、中心に孔があるためこのような結果となっている。先述したように、 m の同じモードに関しては固有値である λ_n もほぼ等しい。したがってそれらのモードの違いは、角方向の場の分布だけである。



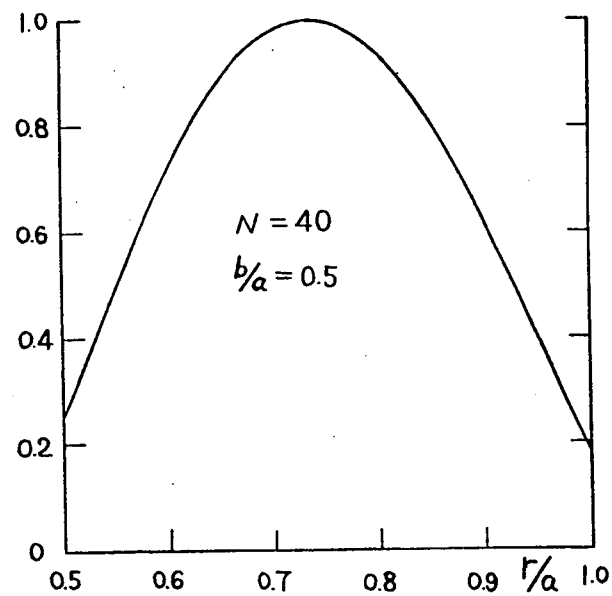
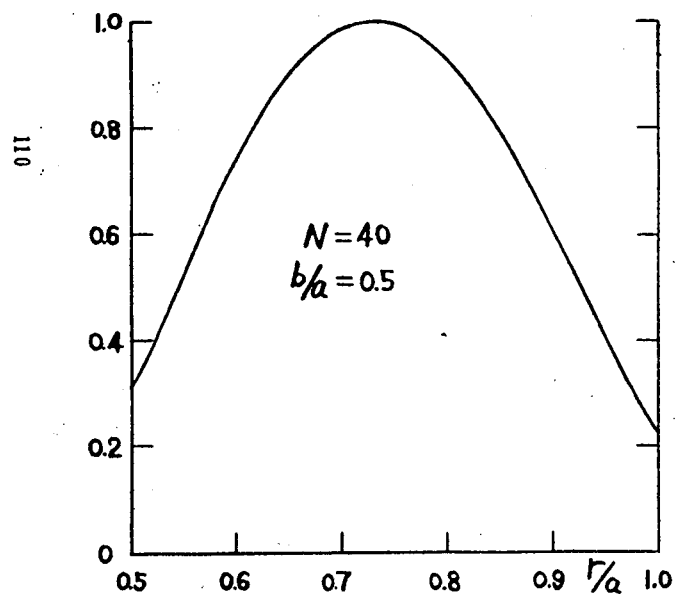
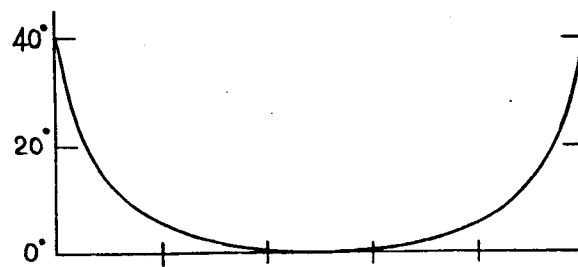
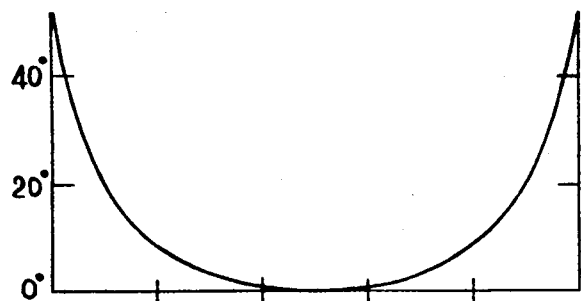
4・6 図 a 有孔共振器の場の分布
(0,0)モード



4・6 図 b 有孔共振器の場の分布
(0,1) モード

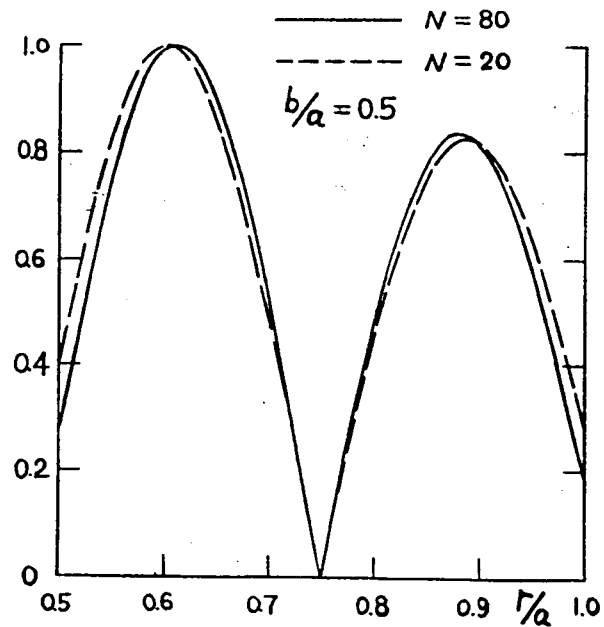
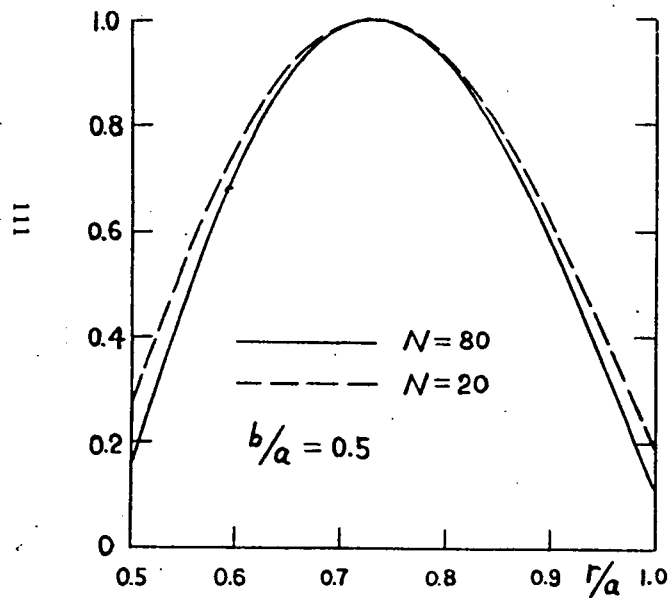
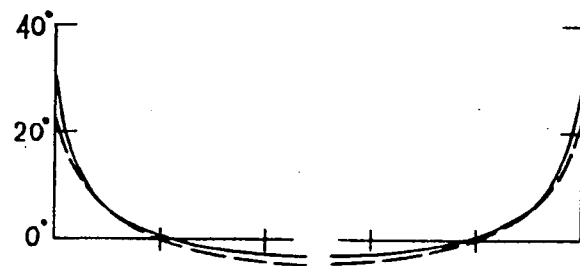


4・6 図 c 有孔共振器の場の分布
(0,2) モード



4・6 図 d 有孔共振器の場の分布
(1, 0) モード

4・6 図 e 有孔共振器の場の分布
(2, 0) モード



4・7 図 a 有孔共振器の場の分布
(0, 0) モード

4・7 図 b 有孔共振器の場の分布
(0, 1) モード

場の分布のフレネル数による違いを、 $(0, 0)$ 、 $(0, 1)$ モードについて、4・7 図 a, b に示す。 $b/a = 0.5$ のときの $N = 20$ と 80 の比較である。フレネル数 N による大差はないが、 $N \rightarrow \infty$ とともに鏡の端 ($r = a, b$) での振巾が 0 に近づき、やがて閉じた共振器のようになる。

最後に n に関して多くの項を考慮した場合の定式化を示す。これは孔のない共振器の自由振動の定式化と同様^{43, 44)} に行う。本節の(1)で、 n に関する行列 K_{nm} 等の非対角要素を無視して固有値 A_n を求めた。このときの n を n_0 と記して、

(4・28) および (4・29) の斉次方程式を解いて、 $a_{n_0}, b_{n_0}, c_{n_0}, d_{n_0}$ を求める。(斉次式であるから例えば $a_{n_0} = 1$ と定める。) $n \neq n_0$ の a_n, b_n, c_n, d_n を求めるために、非対角要素を考慮する。すなわち (4・12) ~ (4・15) の右辺を 0 とおいた斉次方程式で、 $a_{n_0}, b_{n_0}, c_{n_0}, d_{n_0}$ を既知として、 K_{nn_0} 等の非対角要素を考慮する。既知の項を右辺にまわすと、

$$\begin{aligned} & J_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_n - A_n J_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_n \\ & - J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) c_n + \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) d_n \\ & = -8N \{K_{nn_0} a_{n_0} - L_{nn_0} b_{n_0}\} \quad , \end{aligned} \quad (4 \cdot 58)$$

$$\begin{aligned} & A_n J'_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_n - A_n^2 J'_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_n \\ & - A_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) c_n + A_n \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) d_n \\ & = -8N \{M_{nn_0} a_{n_0} - N_{nn_0} b_{n_0}\} \quad , \end{aligned} \quad (4 \cdot 59)$$

$$\begin{aligned} & - J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) a_n + A_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) b_n \\ & + J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(\bar{A}_n) c_n - \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(\bar{A}_n) d_n \\ & = -8\bar{N} \{\bar{K}_{nn_0} c_{n_0} - \bar{M}_{nn_0} d_{n_0}\} \quad , \end{aligned} \quad (4 \cdot 60)$$

$$\begin{aligned} & - \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) a_n + A_n \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) b_n \\ & + \bar{A}_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(\bar{A}_n) c_n - \bar{A}_n^2 J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(\bar{A}_n) d_n \\ & = -8\bar{N} \{\bar{L}_{nn_0} c_{n_0} - \bar{N}_{nn_0} d_{n_0}\} \end{aligned} \quad (4 \cdot 61)$$

となる。以上 4 式を a_n, b_n, c_n, d_n に関する 4 元連立一次方程式として解けばよい。これらを共振器内部の領域の場の分布を表わす (4・53) に用いれば、フレネル数に特有の細かいリップルをもった場の分布が生じる。

(3) 無限長矩形平行平板共振器

ファブリ・ペロー共振器の解析の際にしばしばとりあげられるのは、もっとも解析の容易な、有限の幅をもち無限の長さをもった一次元鏡で構成される共振器である。ここでは、孔のある共振器の極限の場合として、これを取りあげる。すなわち、鏡の半径 a と孔の半径 b の差を一定に保ったまま、 $a, b \rightarrow \infty$ とすると、幅が $(a - b)$ の無限長矩形平行平板共振器となる。この解析は A_n を求める式 (4・38) より出発する。円筒関数は (2・83), (2・84) の漸近形を用いる。漸近形を用いることは、以下に示すように、 $A_n \rightarrow \infty$ であることから正当化される。(4・38) の第1項を0とおいた解、すなわち (4・42) の $A_{\ell m}$ は、現在の場合には、

$$A_{\ell m} = \frac{am\pi}{a-b}, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (4 \cdot 62)$$

となる。この解は ℓ に依存しない。(4・45) の R には、ハンケル関数の漸近形 (2・84) を用いて

$$R \equiv \frac{J_{\ell}(A_{\ell m})}{J_{\ell}(\frac{b}{a}A_{\ell m})} = \frac{H_{\ell}(A_{\ell m})}{H_{\ell}(\frac{b}{a}A_{\ell m})} = (-1)^m \quad (4 \cdot 63)$$

となるから、 A_n の解を表わす (4・46) はこの場合

$$A_n \cong \frac{am\pi}{a-b} \left[1 - (1+i)\xi\pi \cdot \frac{a\alpha}{a-b} \right] \quad (4 \cdot 64)$$

と書ける。これより (4・16) を使って複素周波数が求まる。計算の結果として、損失の小さいとき、one transit loss δ_d は

$$\delta_d = 0.1284 m^2 N^{-3/2} \quad (4 \cdot 65)$$

となる。これはフレネル数の大きい場合の Vainstein の結果¹⁵⁾

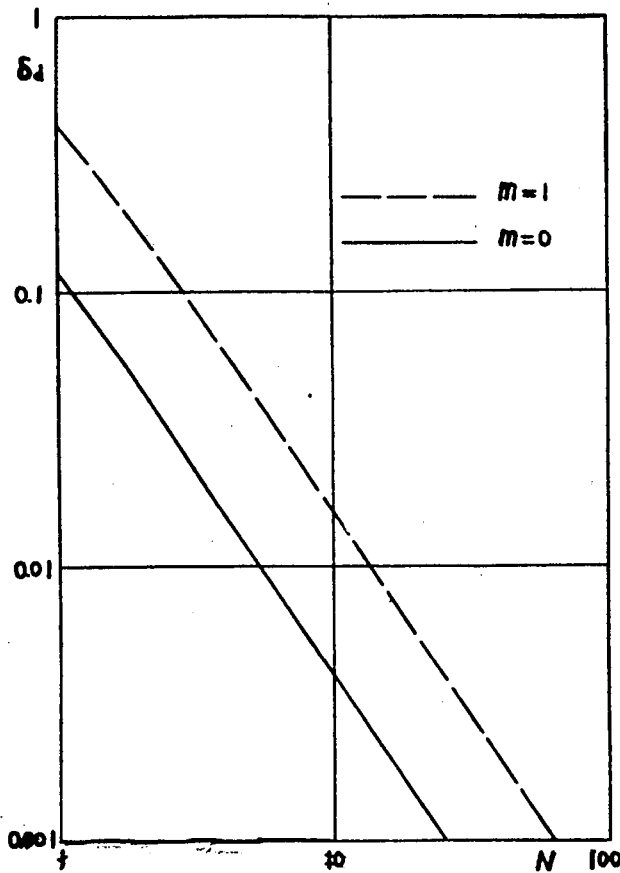
$$\delta_d = 0.1291 m^2 N^{-3/2} \quad (4 \cdot 66)$$

とよく一致している。ただし、このときの N は矩形鏡に対するフレネル数であって、

$$N \equiv \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}{L\lambda} \quad (4 \cdot 67)$$

で定義されるものである。(4・65) の one transit loss δ_d を、フレネ

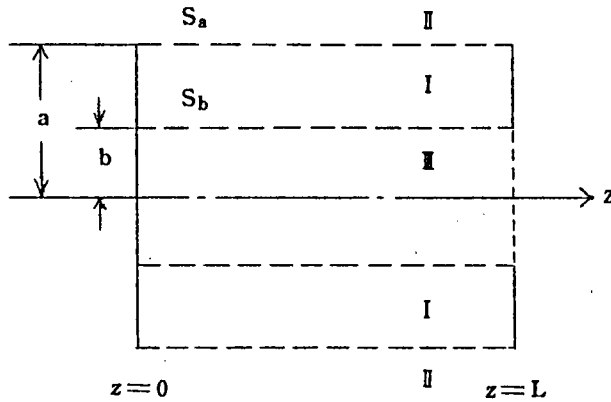
ル数 N に対して目盛ったのが 4・8 図である。



4・8 図 無限長矩形平行平板共振器の回折損失

§ 4・4 一方の鏡のみ有孔の共振器

炭酸ガス・レーザ等に使われるファブリ・ペロー共振器は、通常、一方の鏡にのみ出力孔をもつ。本節では、そのような一方の鏡にのみ孔のある共振器の、自由振動モードの回折損失、共振周波数、場の分布を求める。4・9 図に示すように、 $z=0$ の位置にある鏡には孔がなく、 $z=L$ の鏡には半径 b の孔があるものとする。§ 4・2 と同じように、空間を 3 つの領域に分ける。領域 I、II は § 4・2 と全く同じであるが、領域 III が $z=0$ の鏡に遮られているところ



4・9図 片鏡有孔ファブリ・ペロー共振器

が異なる。したがって領域 I, II の場合は § 4・2 と同じ表現 (4・1), (4・2) を用いるが, 領域 II では, 第 3 章で用いた, $z=0$ の位置にある孔のない鏡上で 0 となる境界条件

$$K(\mathbf{r}|\mathbf{r}')=0 \quad ; \quad z \text{ 又は } z'=0 \quad (4 \cdot 68)$$

を満たすグリーン関数 $K(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ を用いて,

$$\varphi_{II}(\mathbf{r}) = \oint_{S_b} \left[K(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial r'} - \frac{\partial K(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial r'} \varphi(\mathbf{r}') \right] dS \quad (4 \cdot 69)$$

と表わす。ただし, § 4・2 におけるのと同じように, 領域 I と II の結合を無視した。 $K(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ の具体的な形は (3・11) で与えられる。すなわち, 自由空間のグリーン関数 $H(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ から鏡像の方法で作られた, 次式で表わされるものである。

$$K(\mathbf{r}, \theta, z|\mathbf{r}', \theta', z') = H(\mathbf{r}, \theta, z|\mathbf{r}', \theta', z') - H(\mathbf{r}, \theta, z|\mathbf{r}', \theta', -z') \quad (4 \cdot 70)$$

以下, § 4・2 と同じように境界 S_a と S_b で場をなめらかに接続する。すなわち (4・4) ~ (4・7) のようにおく。ここでは, § 4・2 とは異なり, 最初から自由減衰振動モードすなわち無励振問題を取扱うとして定式化する。したがって方程式は斉次式となる。ここで境界面上における直交関数系展開 (4・8) ~ (4・11) を用いる。ただし, 展開係数 $a_{n\ell}^{\pm}$ 等は, 本節においても, a_n 等と略記する。これは, 次に示すように, 方程式が角モード ℓ および

+, - に関して分離しているためである。境界面 S_a 上で領域 I, II の場の値が等しいこと, すなわち (4・4) より

$$\begin{aligned} & J_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_n - A_n J_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_n \\ & - J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) c_n + \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) d_n \\ & + 8N \sum_m \{K_{nm} a_m - L_{nm} b_m\} = 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 71)$$

を得る。また, 境界面 S_a で領域 I, II の場の法線微係数が等しいこと, すなわち (4・5) より

$$\begin{aligned} & A_n J'_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_n - A_n^2 J'_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_n \\ & - A_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) c_n + A_n \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) d_n \\ & + 8N \sum_m \{M_{nm} a_m - N_{nm} b_m\} = 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 72)$$

を得る。同様に, 境界面 S_b 上で領域 II, III の場の値が等しいこと, すなわち (4・6) より

$$\begin{aligned} & - J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) a_n + A_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) b_n \\ & + J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(\bar{A}_n) c_n - \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(\bar{A}_n) d_n \\ & + 8\bar{N} \sum_m \{P_{nm} c_m - Q_{nm} d_m\} = 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 73)$$

を得る。また, 境界面 S_b 上で領域 II, III の場の法線微係数が等しいこと, すなわち (4・7) より

$$\begin{aligned} & - \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) a_n + A_n \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) b_n \\ & + \bar{A}_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(\bar{A}_n) c_n - \bar{A}_n^2 J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(\bar{A}_n) d_n \\ & + 8N \sum_m \{R_{nm} c_m - S_{nm} d_m\} = 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 74)$$

を得る。(4・71) ~ (4・74) の基礎方程式を両鏡有孔の共振器の基礎方程式 (4・12) ~ (4・15) と比べると, \bar{K}_{nm} , \bar{L}_{nm} , \bar{M}_{nm} , \bar{N}_{nm} の代りにそれぞれ P_{nm} , Q_{nm} , R_{nm} , S_{nm} におき代っているところだけが異なる。ここで P_{nm} , Q_{nm} , R_{nm} , S_{nm} は次式で定義されるものである。

$$P_{nm} \equiv \int_0^\infty J_\ell(\bar{A}) H_\ell(\bar{A}) F_{nm}(\kappa) d\kappa \quad (4 \cdot 75)$$

$$Q_{nm} \equiv \int_0^\infty \bar{A} J_\ell(\bar{A}) H'_\ell(\bar{A}) F_{nm}(\kappa) d\kappa \quad (4 \cdot 76)$$

$$R_{nm} \equiv \int_0^\infty \bar{A} J'_\ell(\bar{A}) H_\ell(\bar{A}) F_{nm}(\kappa) d\kappa \quad (4 \cdot 77)$$

$$S_{nm} \equiv \int_0^\infty \bar{A}^2 J'_\ell(\bar{A}) H'_\ell(\bar{A}) F_{nm}(\kappa) d\kappa \quad (4 \cdot 78)$$

ただし

$$\bar{A}^2 \equiv (kb)^2 - \kappa^2 \quad ,$$

$$F_{nm}(\kappa) \equiv (kb) \frac{m}{n} \cdot \frac{(-1)^{n+m} \cdot \sin^2 kL}{\left[\left(\frac{n\pi b}{L} \right)^2 - \kappa^2 \right] \left[\left(\frac{m\pi b}{L} \right)^2 - \kappa^2 \right]}$$

$$\cong (-1)^{n-m} (kb) \cdot \frac{1 - \cos \left(\frac{\bar{A}_n - \bar{A}}{2\pi \bar{N}} \right)}{(\bar{A}_n - \bar{A}^2)(\bar{A}_m - \bar{A}^2)} \quad (4 \cdot 79)$$

である。P_{nm}, Q_{nm}, R_{nm}, S_{nm}の行列要素はK_{nm}, L_{nm}, M_{nm}, N_{nm}の行列要素とよく似ているが、大きな違いは、(n-m)が奇数の場合にK_{nm}等は0となるのに反し、P_{nm}等は0でないことである。つまり、両鏡有孔の共振器では、nに関して偶奇性の異なる結合はないのに反し、片鏡有孔の共振器では、共振器に对称性がないために、偶奇性の異なるn間に結合がある。P_{nm}等は $\bar{A}_n, \bar{A}_m, \bar{N}$ の関数であって、K_{nm}等と次の関係がある。これは(2・34)と(4・79)を比較すれば容易に見出される。(4・20)のように、K_{nm}等が $\bar{A}_n, \bar{A}_m, \bar{N}$ の関数であることを明示した表現を使うと、

$$P_{nm} = \frac{1}{2} (-1)^{n-m} K_{nm}(\bar{A}_n, \bar{A}_m, \frac{1}{2} \bar{N}) \quad (4 \cdot 80)$$

$$Q_{nm} = \frac{1}{2} (-1)^{n-m} M_{nm}(\bar{A}_n, \bar{A}_m, \frac{1}{2} \bar{N}) \quad (4 \cdot 81)$$

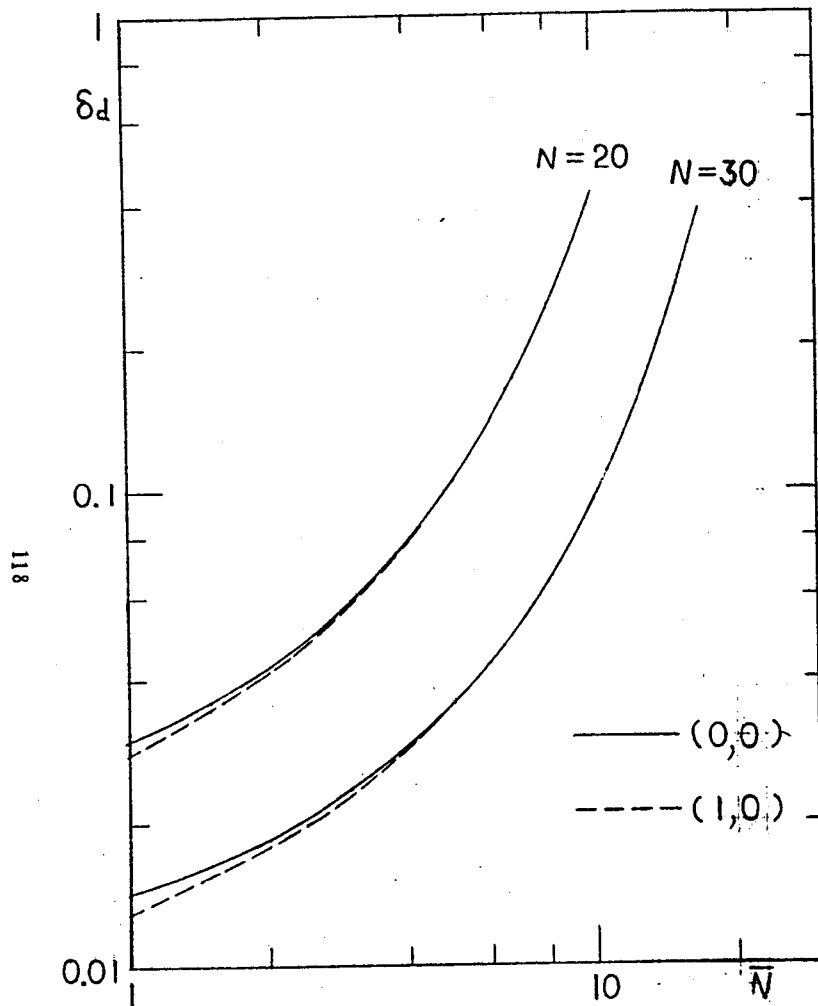
$$R_{nm} = \frac{1}{2} (-1)^{n-m} L_{nm}(\bar{A}_n, \bar{A}_m, \frac{1}{2} \bar{N}) \quad (4 \cdot 82)$$

$$S_{nm} = \frac{1}{2} (-1)^{n-m} N_{nm}(\bar{A}_n, \bar{A}_m, \frac{1}{2} \bar{N}) \quad (4 \cdot 83)$$

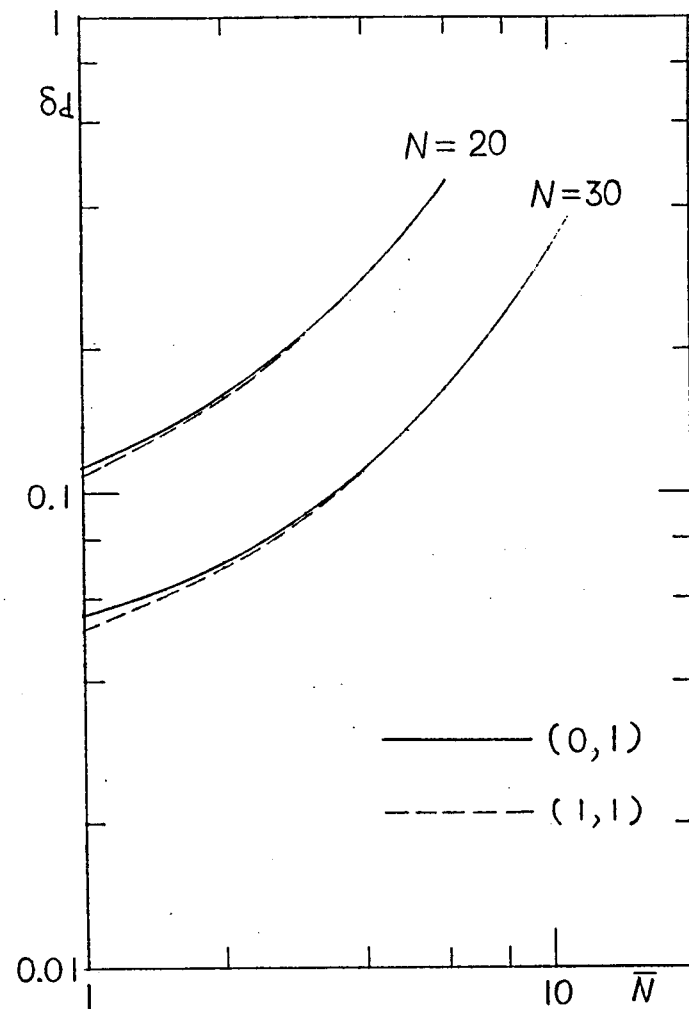
である。n-mが奇数のときは右辺のK_{nm}等は0となるので、(4・80)～(4・83)は成立しないが、この場合には、付録2・1で計算されたn-m=偶数の場合のK_{nm}等が、n-m=奇数の場合にも成立すると拡張して、(4・80)～(4・83)の右辺に用いるものとする。

§ 4・3と同様にして、nに関して一項のみで計算を近似する。(4・71), (4・72)をまとめて次の行列形で示す。

$$\begin{pmatrix} J_{\ell}(\bar{A}_n)H_{\ell}(\bar{A}_n) + 8NK_{nn} & \bar{A}_n J_{\ell}(\bar{A}_n)H'_{\ell}(\bar{A}_n) + 8NL_{nn} \\ \bar{A}_n J'_{\ell}(\bar{A}_n)H_{\ell}(\bar{A}_n) + 8NM_{nn} & \bar{A}_n^2 J'_{\ell}(\bar{A}_n)H'_{\ell}(\bar{A}_n) + 8NN_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ -b_n \end{pmatrix}$$



4・10 図 a 片鏡有孔共振器の回折損失



4・10 図 b 片鏡有孔共振器の回折損失

$$= \begin{pmatrix} J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) & \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) \\ A_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) & A_n \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ -d_n \end{pmatrix} \quad (4 \cdot 84)$$

(4・73), (4・74) を次の形にまとめる。

$$\begin{pmatrix} J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(\bar{A}_n) + 8 \bar{N} P_{nn} & \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(\bar{A}_n) + 8 \bar{N} Q_{nn} \\ \bar{A}_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(\bar{A}_n) + 8 N R_{nn} & \bar{A}_n^2 J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(\bar{A}_n) + 8 N S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ -d_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) & A_n J_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) \\ \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H_\ell(A_n) & A_n \bar{A}_n J'_\ell(\bar{A}_n) H'_\ell(A_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ -b_n \end{pmatrix} \quad (4 \cdot 85)$$

P_{nm} 等の行列要素と K_{nm} 等の行列要素間に (4・80) ~ (4・83) の関係のあることを考慮すれば, (4・84), (4・85) を, 両鏡に孔のある場合に対応する, §4・3 の (4・28), (4・29) と比較して, 次のことがわかる。一方の鏡にのみ孔のある場合の計算は, 両鏡に孔のある場合と比べて, A_n, \bar{A}_n, N は不変として, たゞ孔のフレネル数 \bar{N} の代りに $\frac{1}{2}\bar{N}$ を用いればよい。これは物理的には, 他方の鏡に孔がないため, 領域Ⅱでは鏡間距離が実質的に2倍になっていることを意味する。(4・84), (4・85) を §4・3 と同様にして, 同じ記号を使って, A_n に関して解くと次の結果を得る。

$$A_n \cong A_{\ell m} \left[1 - \frac{(1+i) \xi \pi \alpha}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\sqrt{2} a}{b} R^2}{1 - R^2} \right] \quad (4 \cdot 86)$$

(4・86) を両鏡有孔の (4・46) と比較すると, (4・46) の [] 内の $(a/b) R^2$ が, (4・86) では, $\sqrt{2}$ 倍されていることである。したがって, 一方の鏡にのみ孔のある共振器では, 出力口は少いのにも, 損失は少し増加するという結果となる。(4・86) より計算した one transit loss δ_d を 4・10 図に示す。図には, 鏡のフレネル数 N をパラメータとして, 孔のフレネル数 \bar{N} に対する δ_d の変化を示した。4・10 図 a は (0, 0), (1, 0) モードであり, 図 b は (0, 1), (1, 1) モードである。曲線の傾向は両鏡有孔の場合の 4・3 図と全く同じであるが, 損失が 4・3 図の約 1.2 倍となっている。

120 項欠

第 5 章 両鏡傾斜共振器の自由振動モード

§ 5・1 序

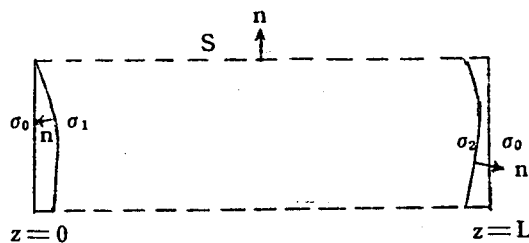
平行平面ファブリ・ペロー共振器では、わずかな鏡の傾斜が回折損失を急増加させる。特に波長が短くなればなるほど、鏡の微調整は難しくなる。赤色光の H.N. ガスレーザ発振器として用いた場合は、鏡の縁端での変位を波長程度以内におさえないと、レーザ発振が困難だといわれている。このように、赤外および光波帯においては、鏡の傾斜の影響は避けがたい。したがって傾斜変形に対する解析は重要な意味をもつ。しかし、現在までに傾斜変形をとりあげた論文は数少い。平行平面型共振器に限ってみれば、Fox, Li,²⁵⁾ Wells²⁸⁾ および Ogura, Yoshida, Ikenoue^{26), 43)} による論文のみである。文献 25), 28) はいずれも干渉計理論による積分方程式の核に傾斜変形をとりいれて、電子計算機によるシミュレーションで解いた数値解析である。文献 26) は空洞理論に、43) は励振理論に基くものである。以上の文献は、両方の鏡が対称的に同形に傾斜したものか、あるいは一方の鏡のみ傾斜したものである。しかし現実には両鏡は互いに無関係に傾斜する。一般に両鏡の傾斜の方向は一致しないし、また傾斜角の大きさも両鏡で異なる。本章では、そのような一般的な場合をとりあげて、その自由振動モードを解析する。この解析は、片鏡傾斜の場合の自由振動を取扱った文献 43) を基礎として、両鏡傾斜を取扱う。したがってそこに出てくる表面積分はそのまま利用できる。(付録 5・1)

本章の解析は次の順序で行う。§ 5・2 では、微小な傾斜変形として、基礎方程式をたてる。このとき変形項は等価励振源となる。他章とは異なり、傾斜のため異なる角モード間の結合が生じる。さらに次のような面倒な事情がある。文献 43) では、モード軸を傾斜方向と一致させることによって、 $\cos \ell\theta$ モードと $\sin \ell\theta$ モードを分離できた。これに反し本章では、両鏡が異なる方向に傾斜しているために、 $\cos \ell\theta$, $\sin \ell\theta$ モードを簡単に分離させることができない。§ 5・3 では、両モードを分離させるためには、モード軸をどの方向に選べばよいかを考える。またモード軸をそのように定めたとき、傾斜に関しては、一つの両鏡傾斜パラメータ K のみですべてが表わされることを示す。

この結果として得られた斉次方程式は、文献43)の方程式で片鏡傾斜パラメータを新しい両鏡傾斜パラメータ K におきかえたものである。§5・4では、この特性行列式を解いて複素周波数を求め、その虚数部より回折損失を K^2 の項まで得る。傾斜のために $(0, 0)$ モードの損失が特に増加し、傾斜角の増加とともに、それは $(0, 1)$ 、 $(1, 0)$ モードの損失と比較的近い値となる。§5・5では、両鏡傾斜パラメータ K が、一方の鏡を変形していない基準系とみなしたときの、他方の鏡の変形を示すものであること、および §5・3 で得たモード軸は、その基準系よりみた最大傾斜方向を示すことを証明する。

§5・2 基礎方程式

本節では最終的には、ファブリ・ペロー共振器の両方の平面円板鏡が、平行状態から傾斜した場合についての、自由振動の基礎方程式を得る。解析は最初は傾斜変形に限定せず、鏡の一般的な変形として取り扱う。本来 $z=0$ および L の位置にある鏡を、それぞれ鏡1および2と呼ぶことにする。5・1図のように、鏡1、2は本来の位置 σ_0 から、それぞれ σ_1 、 σ_2 の位置に変形したものとする。第2章と同様の考え方で出発する。本章では自由振動を考えているので励振源はないが、それに代って鏡面変形による項が等価励振源となって付加する。



5・1図 変形した鏡をもつ
ファブリペロー共振器

変形した鏡面 σ_1 、 σ_2 上で場の境界条件は

$$\varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \sigma_1, \sigma_2 \quad (5 \cdot 1)$$

であるとする。第2章同様に、 $r=a$ の仮想面 S で共振器を内、外部に分ける。共振器外部の場は (2・14) で表わされるが、内部の場は鏡面変形による項

を含む。(2・7)で与えられる, 変形しない面 σ_0 上で境界値 0 をとるグリーン関数 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ を用いると, 内部の場は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varphi_i(\mathbf{r}) = & \int_{\sigma_1} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} d\sigma'_1 + \int_{\sigma_2} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} d\sigma'_2 \\ & + \int_S \left[G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial r'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial r'} \varphi(\mathbf{r}') \right] dS' \end{aligned} \quad (5 \cdot 2)$$

ただし変形による境界面 S の変化は小さいとして無視する。(5・2)を第2章の内部の場を表わす(2・6)と比べると, 励振源による $-\int_{\sigma_0} \frac{\partial G}{\partial r'} \varphi d\sigma$ の代りに $\int_{\sigma_i} G \frac{\partial \varphi}{\partial r'} d\sigma_i$ ($i=1, 2$) があらわれている。したがって後者は等価励振源となる。

次に, 境界面 S 上で内, 外部の場とそれらの法線微係数を等しいとおいて, それらを固有関数展開することにより, 展開係数に対する無限次元の連立一次方程式を得る。第2章と異なるところは, 固有関数展開の際に角方向の基準を $\theta=0$ にとらないで, 次のようにこれと角 η をなす方向にとることである。

$$\varphi(a, \theta, z) = \sum_{n\ell\pm} b_{n\ell}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \ell(\theta-\eta) \right\} \quad (5 \cdot 3)$$

$$\frac{\partial \varphi(a, \theta, z)}{\partial r} = \frac{1}{a} \sum_{n\ell\pm} a_{n\ell}^{\pm} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \ell(\theta-\eta) \right\} \quad (5 \cdot 4)$$

片鏡傾斜のときは, 傾斜の方向と角方向の基準軸を一致させれば \cos モードと \sin モードを分離させることができたが, 今の場合は, 両鏡が傾斜しているために, 一般的に η を導入する。後に, \cos , \sin モードが分離するように, η を定める。ここで

$$\psi_{n\ell}^{\pm} \equiv \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{L}{a^2} \left[\int_{\sigma_1} u_{n\ell}^{\pm} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} u_{n\ell}^{\pm} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma_2 \right], \quad (5 \cdot 5)$$

ただし

$$u_{n\ell}^{\pm}(r, \theta, z) \equiv J_{\ell}\left(A_n \frac{r}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \ell(\theta-\eta) \right\} \quad (5 \cdot 6)$$

のようにおくと, S 面上での連続条件より得られる方程式は, (2・23), (2・24)とまったく同形の次式となる。

$$2\varepsilon_\ell N H_\ell(A_n) \psi_{n\ell}^\pm + J_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_{n\ell}^\pm - A_n J_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_{n\ell}^\pm$$

$$= 8N \left\{ - \sum_{n'} K_{nn'} a_{n'\ell}^\pm + \sum_{n'} L_{nn'} b_{n'\ell}^\pm \right\} \quad (5 \cdot 7)$$

$$2\varepsilon_\ell N A_n H'_\ell(A_n) \psi_{n\ell}^\pm + A_n J'_\ell(A_n) H_\ell(A_n) a_{n\ell}^\pm - A_n^2 J'_\ell(A_n) H'_\ell(A_n) b_{n\ell}^\pm$$

$$= 8N \left\{ - \sum_{n'} M_{nn'} a_{n'\ell}^\pm + \sum_{n'} N_{nn'} b_{n'\ell}^\pm \right\} \quad (5 \cdot 8)$$

($n = 1, 2, \dots, \ell = 0, 1, 2, \dots$)

上式では, (5・3), (5・4), (5・5) で与えられる $b_{n\ell}^\pm$, $a_{n\ell}^\pm$, $\psi_{n\ell}^\pm$ 以外は, すべて第2章の記号を用いている。(5・5)の積分中の $[\partial\varphi/\partial n]_{\sigma_i}$ ($i=1, 2$) は未知関数であるが, 次の一致条件でこれを求める。(5・2) で表わされる共振器内部の場の法線微分を鏡面上で行って $[\partial\varphi/\partial n]_{\sigma_i}$ を求めると, それは右辺の積分中の $[\partial\varphi/\partial n]_{\sigma_i}$ と一致しなければならない。この一致条件は

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right]_{\sigma_i} = \int_{\sigma_1} \frac{\partial G(\sigma_i | \sigma'_1)}{\partial n} \cdot \frac{\partial\varphi(\sigma'_1)}{\partial n'} d\sigma'_1 + \int_{\sigma_2} \frac{\partial G(\sigma_i | \sigma'_2)}{\partial n} \cdot \frac{\partial\varphi(\sigma'_2)}{\partial n'} d\sigma'_2$$

$$+ \int_S \left[\frac{\partial G(\sigma_i | S')}{\partial n} \cdot \frac{\partial\varphi(S')}{\partial r'} - \frac{\partial^2 G(\sigma_i | S')}{\partial n \partial r'} \varphi(S') \right] dS' \quad (5 \cdot 9)$$

($i = 1, 2$)

である。(5・9)の第3項の積分中でS上の $\partial\varphi/\partial r$, φ を(5・3), (5・4)の展開形に書換え, 更に $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$ の表現式(2・7)を用いて積分を行うと, 第3項は $a_{n\ell}^\pm$, $b_{n\ell}^\pm$ で表わすことができる。すなわち(5・9)は

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right]_{\sigma_i} = \int_{\sigma_1} \frac{\partial G(\sigma_i | \sigma'_1)}{\partial n} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n'} \right]_{\sigma_1} d\sigma'_1 + \int_{\sigma_2} \frac{\partial G(\sigma_i | \sigma'_2)}{\partial n} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n'} \right]_{\sigma_2} d\sigma'_2$$

$$+ \frac{i\pi}{2} \sum_{n, k \pm} \{ H_k(A_n) a_{nk}^\pm - A_n H'_k(A_n) b_{nk}^\pm \} \left[\frac{\partial u_{nk}}{\partial n} \right]_{\sigma_i} \quad (i=1, 2) \quad (5 \cdot 10)$$

となる。以上により解くべき問題は, (5・7), (5・8), (5・10) を連立方程式とみなして, $[\partial\varphi/\partial n]_{\sigma_1}$, $[\partial\varphi/\partial n]_{\sigma_2}$, $a_{n\ell}^\pm$, $b_{n\ell}^\pm$ を決定することである。

以下に近似解法を試みる。鏡の変形が波長に比して小さい, したがって変形

の効果が小さいと考えられるときには、方程式は逐次近似法によって解くことができる。回折損失を求める際には、異なる n 間の結合は無視してよいと考えられるから、以下では特別の n のみに注目し、 $a_{n\ell}^{\pm}$, $b_{n\ell}^{\pm}$, $u_{n\ell}^{\pm}$, $\psi_{n\ell}^{\pm}$ から n の記号を省略して、 a_{ℓ}^{\pm} , b_{ℓ}^{\pm} , u_{ℓ}^{\pm} , ψ_{ℓ}^{\pm} と記す。今回折損失を求めようとしているモードの角モード番号を ℓ とし、一般のモードの角モード番号を k と記す。このとき a_{ℓ}^{\pm} , b_{ℓ}^{\pm} を変形の 0 次の微小量であるとし、 $k \neq \ell$ の a_k^{\pm} , b_k^{\pm} を 1 次の微小量であると考え、 $\{\partial\varphi/\partial n\}_{\sigma}$ をあらわす (5・10) において、1 次の項までを問題にするならば、第 1 項、第 2 項は 1 次、第 3 項は 0 次プラス 1 次の形である。したがって、第 1, 2 項の積分における $\{\partial\varphi/\partial n\}_{\sigma}$ として、第 3 項における 0 次の項 $k = \ell$ を代入する。その結果として、(5・10) は次のように a_k^{\pm} , b_k^{\pm} のみで表わされる。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right\}_{\sigma_i} = & \frac{i\pi}{2} \sum_{\tau=\pm, -} \{ H_{\ell}(\lambda) a_{\ell}^{\tau} - \lambda H'_{\ell}(\lambda) b_{\ell}^{\tau} \} \left\{ \frac{\partial u_{\ell}^{\tau}}{\partial n} \right\}_{\sigma_i} \\ & + \frac{i\pi}{2} \sum_{k \neq \ell} \sum_{\tau=\pm, -} \{ H_k(\lambda) a_k^{\tau} - \lambda H'_k(\lambda) b_k^{\tau} \} \left\{ \frac{\partial u_k^{\tau}}{\partial n} \right\}_{\sigma_i} \\ & + \frac{i\pi}{2} \sum_{\tau=\pm, -} \{ H_{\ell}(\lambda) a_{\ell}^{\tau} - \lambda H'_{\ell}(\lambda) b_{\ell}^{\tau} \} \\ & \times \left\{ \int_{\sigma_1} \frac{\partial G(\sigma_i | \sigma_1)}{\partial n} \left\{ \frac{\partial u_{\ell}^{\tau}}{\partial n} \right\}_{\sigma_1} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} \frac{\partial G(\sigma_i | \sigma_2)}{\partial n} \left\{ \frac{\partial u_{\ell}^{\tau}}{\partial n} \right\}_{\sigma_2} d\sigma_2 \right\} \\ & (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (5 \cdot 11)$$

ただし 2 次以上の高次の項は無視した。(5・11) の第 1 項は変形について 0 次、第 2, 3 項は 1 次の項である。(5・11) を (5・5) に代入して ψ_k^{\pm} を求める。その結果を (5・7), (5・8) に用いれば、 a_k^{\pm} , b_k^{\pm} に関する連立一次方程式となる。

ここで鏡の変形は両平面鏡が傾斜したものとする。この傾斜変形を円筒座標系を用いて記述する。鏡 1 の最大傾斜の方向は $\theta = \beta_1$ の方向とし、鏡 2 のそれは $\theta = \beta_2$ の方向とする。鏡の中心を基準としての鏡の端における最大の変位の波長 λ に対する比を、各鏡の傾斜パラメータと呼ぶことにする。鏡 1, 2 の傾斜パラメータをそれぞれ K_1 , K_2 と記す。すなわち鏡 1 は

$$z_1(r, \theta) = K_1 \lambda \cdot \frac{r}{a} \cos(\theta - \beta_1), \quad r \leq a \quad (5 \cdot 12)$$

の位置にあり，鏡 2 は

$$z_2(r, \theta) = L + K_2 \lambda \frac{r}{a} \cos(\theta - \beta_2), \quad r \leq a \quad (5 \cdot 13)$$

の位置にある。

(5・12)，(5・13)のように両鏡の傾斜の状態を与えて，(5・11)を(5・5)に代入すると2つの型の積分が生じる。これらの積分の動径方向に関する部分は片鏡傾斜の場合と同じである。異なるところは，前者では少し複雑な両鏡の傾斜角を含む因子の組合せが生じることである。積分の詳細は付録 5・1 に示して，ここでは結果のみをとりだす。

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_i} u_k^\rho \frac{\partial u_k^\tau}{\partial n} d\sigma_i &\cong \int_{\sigma_i} \frac{\partial u_k^\rho}{\partial n} \cdot u_k^\tau d\sigma_i \\ &\cong - \frac{2n\pi^2 a^2 K_i}{L} D_{ikk'}^{\rho\tau} \quad (i=1, 2; \quad \rho, \tau = +, -) \end{aligned} \quad (5 \cdot 14)$$

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_i} u_k^\rho(\sigma_i) \int_{\sigma_j} \frac{\partial G(\sigma_i | \sigma'_j)}{\partial n} \cdot \frac{\partial u_{k'}^\tau(\sigma'_j)}{\partial n'} d\sigma_i d\sigma'_j \\ \cong (-1)^{i+j} \cdot \frac{2\pi^2 a^4 K_i K_j}{L} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \Delta_{ijkk'}^{\rho\tau} \end{aligned} \quad (5 \cdot 15)$$

(i, j = 1, 2 ; \rho, \tau = +, -)

ただし $D_{ikk'}^{\rho\tau}$ は $k' = k \pm 1$ の時以外は 0 となり，また $\Delta_{ijkk'}^{\rho\tau}$ は $k' = k$ ， $k \pm 2$ の時以外は 0 となるもので，その定義はそれぞれ (A5・6)，(A5・14) で示される。

ψ_ℓ^ρ を表わす (5・5) の積分中に (5・11) の $[\partial\varphi/\partial n]_\sigma$ を用いると，(5・7)，(5・8) の基礎方程式は次の行列形に書き換えられる。

$$\begin{pmatrix} A_\ell & B_\ell & 0 & 0 \\ C_\ell & D_\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_\ell & B_\ell \\ 0 & 0 & C_\ell & D_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\ell^+ \\ -b_\ell^+ \\ \bar{a}_\ell \\ -\bar{b}_\ell \end{pmatrix} = \sum_{k=\ell, \ell \pm 1} \begin{pmatrix} E_{\ell k}^+ & F_{\ell k}^+ & E_{\ell k}^- & F_{\ell k}^- \\ G_{\ell k}^+ & H_{\ell k}^+ & G_{\ell k}^- & H_{\ell k}^- \\ E_{\ell k}^+ & F_{\ell k}^+ & E_{\ell k}^- & F_{\ell k}^- \\ G_{\ell k}^+ & H_{\ell k}^+ & G_{\ell k}^- & H_{\ell k}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k^+ \\ -b_k^+ \\ \bar{a}_k \\ -\bar{b}_k \end{pmatrix} \quad (5 \cdot 16)$$

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k & 0 & 0 \\ C_k & D_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_k & B_k \\ 0 & 0 & C_k & D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k^+ \\ -b_k^+ \\ \bar{a}_k \\ -\bar{b}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{k\ell}^+ & F_{k\ell}^+ & E_{k\ell}^- & F_{k\ell}^- \\ G_{k\ell}^+ & H_{k\ell}^+ & G_{k\ell}^- & H_{k\ell}^- \\ E_{k\ell}^+ & F_{k\ell}^+ & E_{k\ell}^- & F_{k\ell}^- \\ G_{k\ell}^+ & H_{k\ell}^+ & G_{k\ell}^- & H_{k\ell}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\ell^+ \\ -b_\ell^+ \\ \bar{a}_\ell \\ -\bar{b}_\ell \end{pmatrix}, \quad k=\ell \pm 1, \quad (5 \cdot 17)$$

ただし

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_k \equiv \begin{pmatrix} J_k(A) H_k(A) + 8 N K_{nn} & A J_k(A) H'_k(A) + 8 N L_{nn} \\ A J'_k(A) H_k(A) + 8 N M_{nn} & A^2 J'_k(A) H'_k(A) + 8 N N_{nn} \end{pmatrix} \quad (5 \cdot 18)$$

$$k = \ell, \ell \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{\ell\ell}^{\rho\tau} \equiv 4 \pi^2 N^2 \varepsilon_{\ell} \{ K_1^2 A_{11}^{\rho\tau} - K_1 K_2 (A_{12}^{\rho\tau} + A_{21}^{\rho\tau}) + K_2^2 A_{22}^{\rho\tau} \} \\ \times \begin{pmatrix} \{H_{\ell}(A)\}^2 & A H_{\ell}(A) H'_{\ell}(A) \\ A H_{\ell}(A) H'_{\ell}(A) & \{A H'_{\ell}(A)\}^2 \end{pmatrix} \quad (5 \cdot 19)$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{\ell k}^{\rho\tau} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{k\ell}^{\tau\rho} \\ \equiv i 2 \pi^2 N \varepsilon_{\ell} (K_1 D_1 \ell_k^{\rho\tau} - K_2 D_2 \ell_k^{\rho\tau}) \begin{pmatrix} H_{\ell}(A) H_k(A) & A H_{\ell}(A) H'_k(A) \\ A H'_{\ell}(A) H_k(A) & A^2 H'_{\ell}(A) H'_k(A) \end{pmatrix} \quad (5 \cdot 20) \\ (k = \ell \pm 1)$$

(5・18) ~ (5・20) の左辺において、簡単化のため、本来各行列要素に付すべき肩符、脚符を () の外に付した。

§ 5・3 cos, sin モードの分離

(5・16), (5・17) の 4×4 の行列方程式の左辺は、+, - が分離して、2つの 2×2 行列になっている。ここで、右辺の行列においても同様に+, - を分離できて、 2×2 行列にできれば、方程式は非常に簡単化される。以下に、角方向の基準軸のとり方によって、この分離が可能になることを示す。これを示すために、(5・19), (5・20) の右辺を具体的な形で書く。計算の便宜のため、鏡1, 2の傾斜方向を示す β_1, β_2 を

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \beta \\ \beta_2 &= -\beta \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 21)$$

のように選ぶ。このように座標を選んでも一般性は失われない。(5・19) 右辺の { } 内は ρ, τ の組合せにより4種類の因子となる。これらを (A 5・14) を用いて書くと

$$K_1^2 A_{11}^{\tau\tau} - K_1 K_2 (A_{12}^{\tau\tau} + A_{21}^{\tau\tau}) + K_2^2 A_{22}^{\tau\tau} \\ = \frac{\pi^2}{4} \varepsilon_{\ell-1} I_{\ell\ell-1\ell}(A) \{ (1 + \delta_{\ell 1}) K^2 + 2 \delta_{\ell 1} \{ K^2 \cos 2(\beta - \eta) \}$$

$$-2K_1K_2\cos 2\eta + K_2^2\cos 2(\beta + \eta)] + \frac{\pi^2}{4}\varepsilon_{\ell+1}I_{\ell\ell+1\ell}(A) \cdot (1 + \delta_{\ell 0})^2 K^2, \quad (5 \cdot 22)$$

$$\begin{aligned} & K_1^2 A_{11} \bar{\ell} \bar{\ell} - K_1 K_2 (A_{12} \bar{\ell} \bar{\ell} + A_{21} \bar{\ell} \bar{\ell}) + K_2^2 A_{22} \bar{\ell} \bar{\ell} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \varepsilon_{\ell-1} I_{\ell\ell-1\ell}(A) [(1 + \delta_{\ell 1}) K^2 + 2\delta_{\ell 1} \{K_1^2 \cos 2(\beta - \eta) \\ & \quad - 2K_1K_2\cos 2\eta + K_2^2\cos 2(\beta + \eta)\}] + \frac{\pi^2}{4} \varepsilon_{\ell+1} I_{\ell\ell+1\ell}(A) \cdot (1 - \delta_{\ell 0}) K^2, \end{aligned} \quad (5 \cdot 23)$$

$$\begin{aligned} & K_1^2 A_{11} \bar{\ell} \bar{\ell}^+ - K_1 K_2 (A_{12} \bar{\ell} \bar{\ell}^+ + A_{21} \bar{\ell} \bar{\ell}^+) + K_2^2 A_{22} \bar{\ell} \bar{\ell}^+ \\ &= K_1^2 A_{11} \bar{\ell} \bar{\ell}^+ - K_1 K_2 (A_{12} \bar{\ell} \bar{\ell}^+ + A_{21} \bar{\ell} \bar{\ell}^+) + K_2^2 A_{22} \bar{\ell} \bar{\ell}^+ \\ &= \pi^2 I_{\ell\ell-1\ell}(A) \delta_{\ell 1} [K_1 \sin(\beta - \eta) + K_2 \sin(\beta + \eta)] \\ & \quad \times [K_1 \cos(\beta - \eta) - K_2 \cos(\beta + \eta)] \end{aligned} \quad (5 \cdot 24)$$

となる。ただし K は両鏡傾斜パラメータで、次式で定義される。

$$K^2 \equiv K_1^2 - 2K_1K_2\cos 2\beta + K_2^2 \quad (5 \cdot 25)$$

$\delta_{\ell k}$ はクロネッカーの記号である。 ε_{ℓ} は、(2・9)で与えられるように、 $\ell = 0$ のとき 1, $\ell \geq 1$ のとき 2 であるが、本節ではこの他に便宜上 $\ell \leq -1$ のとき、0 となることを付加する。

$$\varepsilon_{\ell} = \begin{cases} 2 & \ell \geq 1 \\ 1 & \ell = 0 \\ 0 & \ell \leq -1 \end{cases} \quad (5 \cdot 26)$$

(5・20)の右辺の()内は k, ρ, τ の組合せにより 8 種類の因子となる。これらに (A 5・6) を用いると、(5・27) ~ (5・34) のようになる。

$$K_1 D_{1\ell\ell-1}^{++} - K_2 D_{2\ell\ell-1}^{++} = \frac{\pi^2}{4} (1 + \delta_{\ell 1}) I_{\ell\ell-1}(A) \{K_1 \cos(\beta - \eta) - K_2 \cos(\beta + \eta)\} \quad (5 \cdot 27)$$

$$K_1 D_{1\ell\ell+1}^{++} - K_2 D_{2\ell\ell+1}^{++} = \frac{\pi^2}{4} (1 + \delta_{\ell 0}) I_{\ell\ell+1}(A) \{K_1 \cos(\beta - \eta) - K_2 \cos(\beta + \eta)\} \quad (5 \cdot 28)$$

$$K_1 D_{1\ell\ell-1}^{+-} - K_2 D_{2\ell\ell-1}^{+-} = \frac{\pi^2}{4} (-1 + \delta_{\ell 1}) I_{\ell\ell-1}(A) \{K_1 \sin(\beta - \eta) + K_2 \sin(\beta + \eta)\} \quad (5 \cdot 29)$$

$$K_1 D_{1\ell\ell+1}^{+-} - K_2 D_{2\ell\ell+1}^{+-} = \frac{\pi^2}{4} (1 + \delta_{\ell 0}) I_{\ell\ell+1}(\lambda) \{K_1 \sin(\beta - \eta) + K_2 \sin(\beta + \eta)\} \quad (5 \cdot 30)$$

$$K_1 D_{1\ell\ell-1}^{+-} - K_2 D_{2\ell\ell-1}^{+-} = \frac{\pi^2}{4} (1 + \delta_{\ell 1}) I_{\ell\ell-1}(\lambda) \{K_1 \sin(\beta - \eta) + K_2 \sin(\beta + \eta)\} \quad (5 \cdot 31)$$

$$K_1 D_{1\ell\ell+1}^{+} - K_2 D_{2\ell\ell+1}^{+} = \frac{\pi^2}{4} (-1 + \delta_{\ell 0}) I_{\ell\ell+1}(\lambda) \{K_1 \sin(\beta - \eta) + K_2 \sin(\beta + \eta)\} \quad (5 \cdot 32)$$

$$K_1 D_{1\ell\ell-1}^{+} - K_2 D_{2\ell\ell-1}^{+} = \frac{\pi^2}{4} (1 - \delta_{\ell 1}) I_{\ell\ell-1}(\lambda) \{K_1 \cos(\beta - \eta) - K_2 \cos(\beta + \eta)\} \quad (5 \cdot 33)$$

$$K_1 D_{1\ell\ell+1}^{-} - K_2 D_{2\ell\ell+1}^{-} = \frac{\pi^2}{4} (1 - \delta_{\ell 0}) I_{\ell\ell+1}(\lambda) \{K_1 \cos(\beta - \eta) - K_2 \cos(\beta + \eta)\} \quad (5 \cdot 34)$$

(5・27) ~ (5・34) の左辺 $K_1 D_{1\ell k}^{\rho\tau} - K_2 D_{2\ell k}^{\rho\tau}$ で、 (ℓ) と (k) を入れ換えたものは等しい ($k = \ell \pm 1$; $\rho, \tau = +, -$)。

(5・19), (5・20) で、 ρ と τ が異符号の行列要素は、(5・24), (5・29) ~ (5・32) でわかるように、すべて $\{K_1 \sin(\beta - \eta) + K_2 \sin(\beta + \eta)\}$ の因子を含んでいる。したがって、この因子が 0 となるように、角モードの基準座標軸 η を

$$\tan \eta = \frac{K_1 + K_2}{K_1 - K_2} \tan \beta \quad (5 \cdot 35)$$

と選ぶことにする。その結果は、cos モードと sin モードが分離して、 4×4 の行列形で表わされている基礎方程式 (5・16), (5・17) は次のように 2×2 行列形に簡約される。

$$\begin{pmatrix} A_\ell & B_\ell \\ C_\ell & D_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\ell \\ -b_\ell \end{pmatrix} = \sum_{k=\ell, \ell \pm 1} \begin{pmatrix} E_{\ell k} & F_{\ell k} \\ G_{\ell k} & H_{\ell k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ -b_k \end{pmatrix} \quad (5 \cdot 36)$$

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ -b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{k\ell} & F_{k\ell} \\ G_{k\ell} & H_{k\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\ell \\ -b_\ell \end{pmatrix}, \quad k = \ell \pm 1 \quad (5 \cdot 37)$$

ただし、cos モードと sin モードに関して、(5・36), (5・37) はまったく同形に書けるので、肩符 ρ を省略した。なお、(5・35) のように η を選ぶと、(5・22), (5・23) に含まれる K_1, K_2 に関する因子は

$$K_1^2 \cos 2(\beta - \eta) - 2K_1 K_2 \cos 2\eta + K_2^2 \cos 2(\beta + \eta) = K^2 \quad (5 \cdot 38)$$

となり, (5・27), (5・28), (5・33), (5・34)に含まれる同様の因子は

$$\{K_1 \cos(\beta - \eta) - K_2 \cos(\beta + \eta)\}^2 = K^2 \quad (5 \cdot 39)$$

となって, (5・38), (5・39)はともに両鏡傾斜パラメータ K のみの関数である。この結果として, (5・36), (5・37)の連立方程式は, 次の唯一の点を除いて, 片鏡傾斜の式とまったく同じものであることがわかる。片鏡傾斜では, 傾斜パラメータとして K_1 のみがあらわれていたが ($K_2 = 0$), 本章ではその K_1 の代りに K がおきかわっている。つまり本章の K は, 両鏡傾斜の, 唯一の傾斜に関するパラメータとなっている。^{*} 勿論 $K_2 = 0$ とすれば, $K = K_1$ となって片鏡傾斜の場合を含む。

§5・4 回折損失

(5・36), (5・37)に対しては, 片鏡傾斜の場合と同じ解法^{43), 44)}を行うので, これについてはごく簡単に述べるにとどめる。(5・37)を(5・36)に代入して, その結果が斉次式であることから, 係数のつくる行列式を0とおいて, それを整理すると次のようになる。

$$A \equiv \begin{vmatrix} J_\ell H_\ell + 8NK_{nn} & AJ_\ell H'_\ell + 8NL_{nn} \\ AJ'_\ell H_\ell + 8NM_{nn} & A^2 J'_\ell H'_\ell + 8NN_{nn} \end{vmatrix} + (\mu^\rho - \nu^\rho) \begin{vmatrix} (H_\ell)^2 & AH_\ell H'_\ell \\ AH_\ell H'_\ell & (AH'_\ell)^2 \end{vmatrix} = 0$$

($\rho = +, -$) (5・40)

ただし, 簡単化のために, 円筒関数 $J_k(A)$, $H_k(A)$ の引数 A を省略した。また, μ^ρ , ν^ρ は次のように定義されるものである。

$$\begin{aligned} \mu^\pm &\equiv 8\pi^e N^2 K^2 \varepsilon_\ell \left[\frac{\varepsilon_{\ell-1}}{A_{\ell-1}} \{N_{nn}(H_{\ell-1})^2 - (L_{nn} + M_{nn})AH_{\ell-1}H'_{\ell-1} + K_{nn}(AH_{\ell-1})^2\} \right. \\ &\quad \times \{I_{\ell\ell-1}(A)\}^2 (1 \pm \delta_{\ell 1})^2 + \frac{\varepsilon_{\ell+1}}{A_{\ell+1}} \{N_{nn}(H_{\ell+1})^2 - (L_{nn} + M_{nn})AH_{\ell+1}H'_{\ell+1} + K_{nn}(AH_{\ell+1})^2\} \\ &\quad \left. \times \{I_{\ell\ell+1}(A)\}^2 (1 \pm \delta_{\ell 0})^2 \right] \quad (\text{複号同順}) \quad (5 \cdot 41) \end{aligned}$$

* このことは, 最後に回折損失を求める際に, K_1 , K_2 について自乗の項までを考慮する場合のことであって, さらに高次の K_1 , K_2 を考慮すれば, K が唯一のパラメータではありえないであろう。

$$\nu^{\pm} = \pi^* N^2 K^2 \varepsilon_{\ell} \left[\varepsilon_{\ell-1} I_{\ell\ell-1\ell}(A) (1 \pm \delta_{\ell 1})^2 + \varepsilon_{\ell+1} I_{\ell\ell+1\ell}(A) (1 \pm \delta_{\ell 0})^2 \right] \quad (\text{複号同順}) \quad (5 \cdot 42)$$

ただし,

$$\Delta_k \equiv \begin{vmatrix} J_k H_k + 8 N K_{nn} & A J_k H'_k + 8 N L_{nn} \\ A J'_k H_k + 8 N M_{nn} & A^2 J'_k H'_k + 8 N N_{nn} \end{vmatrix} \quad (5 \cdot 43)$$

である。(5・40)は次のように簡単になる。

$$A = A_{\ell} + (\mu^{\rho} - \nu^{\rho}) \cdot 8N \left[N_{nn} (H_{\ell})^2 - (M_{nn} + L_{nn}) A H_{\ell} H'_{\ell} + K_{nn} (A H'_{\ell})^2 \right] = 0 \quad (5 \cdot 44)$$

$K=0$ のときは第1項だけとなって、鏡の傾斜のないときの回折損失を求める文献43)の(3・1)と一致する。

$(KN)^2$ の項まで正しく得られるように、(5・44)の根 A を求める。フレネル数 N が1より大であるとして、(A2・28)～(A2・31)の K_{nn} , L_{nn} , M_{nn} , N_{nn} のベキ展開表示を用いると、(5・44)は次のように近似される。

$$J_{\ell}(A) H_{\ell}(A) + \frac{(1-i)\xi}{2\sqrt{\pi N}} + (\mu^{\rho} - \nu^{\rho}) \cdot \{H_{\ell}(A)\}^2 = 0 \quad (5 \cdot 45)$$

ここで ξ は次式で定義されるものである。

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) \cong 0.369 \quad (5 \cdot 46)$$

今 $N > 1$, $KN \ll 1$ と考えているから、(5・45)では第1項がもっとも主要な項である。よって A の根はベッセル関数の根 $A_{\ell m}$ に近い値をとる。ここで

$$A = A_{\ell m} (1 + \delta) \quad (5 \cdot 47)$$

とおいて、 δ を求めると、終局的に

$$\begin{aligned} \delta \cong & -\frac{\pi}{2} \left[\frac{(1+i)\xi}{2\sqrt{\pi N}} - i(\mu^{\rho} - \nu^{\rho}) \{N_{\ell}(A_{\ell m})\}^2 \right. \\ & \left. - \frac{(1-i)\xi}{4} \sqrt{\frac{\pi}{N}} (\mu^{\rho} - \nu^{\rho}) \{N_{\ell}(A_{\ell m})\}^2 \{(1-2\ell) + \pi A_{\ell m}^2 J_{\ell+1}(A_{\ell m}) N_{\ell+1}(A_{\ell m})\} \right] \end{aligned} \quad (5 \cdot 48)$$

を得る。 A を周波数に変換して、その虚数部より one transit loss δ_d を求めることができる。 δ_d と A の関係は、(3・73)に示すように、

$$\delta_d \cong -\frac{I_m(A^2)}{2\pi N} \quad (5 \cdot 49)$$

で与えられる。(5・48)の〔 〕内の第1項は鏡が傾斜していない時の回折損失に寄与し、第2, 3項は、 $K^2 N^2$ の因子を含むことから、鏡が傾斜した時の付加の回折損失に寄与する。 $\nu\rho$ に含まれる一部の積分を数値計算して、モード毎の回折損失を

$$\delta_d = A_{\ell m} N^{-3/2} + B_{\ell m} K^2 N^{1/2} \quad (5 \cdot 50)$$

の形で与えると、 $A_{\ell m}$, $B_{\ell m}$ は第5・1表のようになる。 $\ell \neq 1$ のモードでは cos モードと sin モードは縮退していて、 $\ell = 1$ のモードのみ cos モードと sin モードが異なる損失を有する。sin モードは最大傾斜の方向に節線をもち、cos モードはこれに垂直な方向に節線をもつものである。

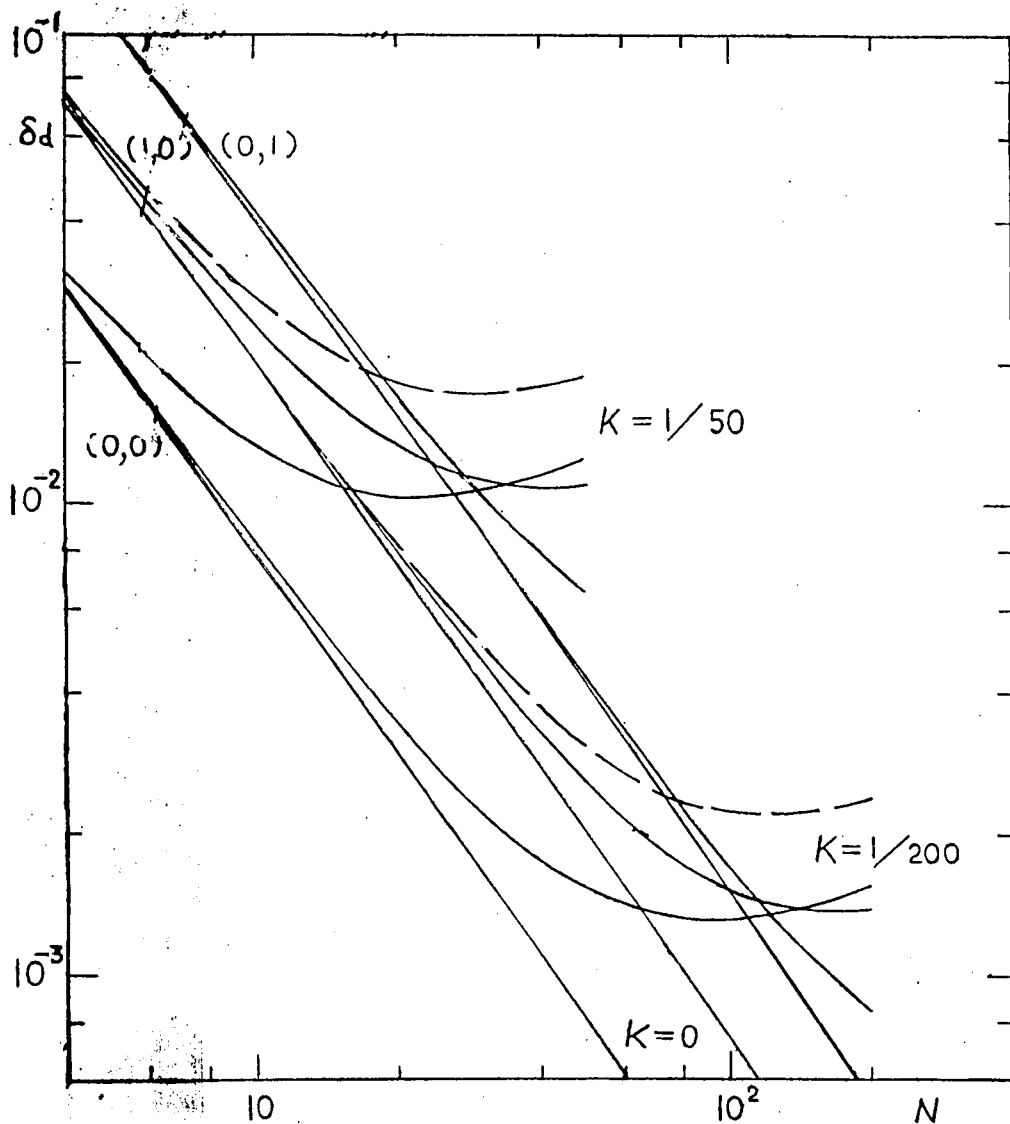
$\begin{matrix} \ell \\ m \end{matrix}$	0	1	2	3
0	0.301 4.16	0.764 3.17, 5.99	1.37 7.39	2.12 9.88
1	1.59 0.830	2.56 0.956, 1.79	3.69 2.70	4.96 4.15
2	3.90 0.351	5.29 0.478, 0.861	7.02 1.41	8.86 2.31
3	7.23 0.192	9.23 0.266, 0.494	11.4 0.867	13.7 1.49

5・1表 $A_{\ell m}$, $B_{\ell m}$ の数値
上段 $A_{\ell m}$, 下段 $B_{\ell m}$ $\ell = 1$ では左下が sin θ モード,
右下が cos θ モード

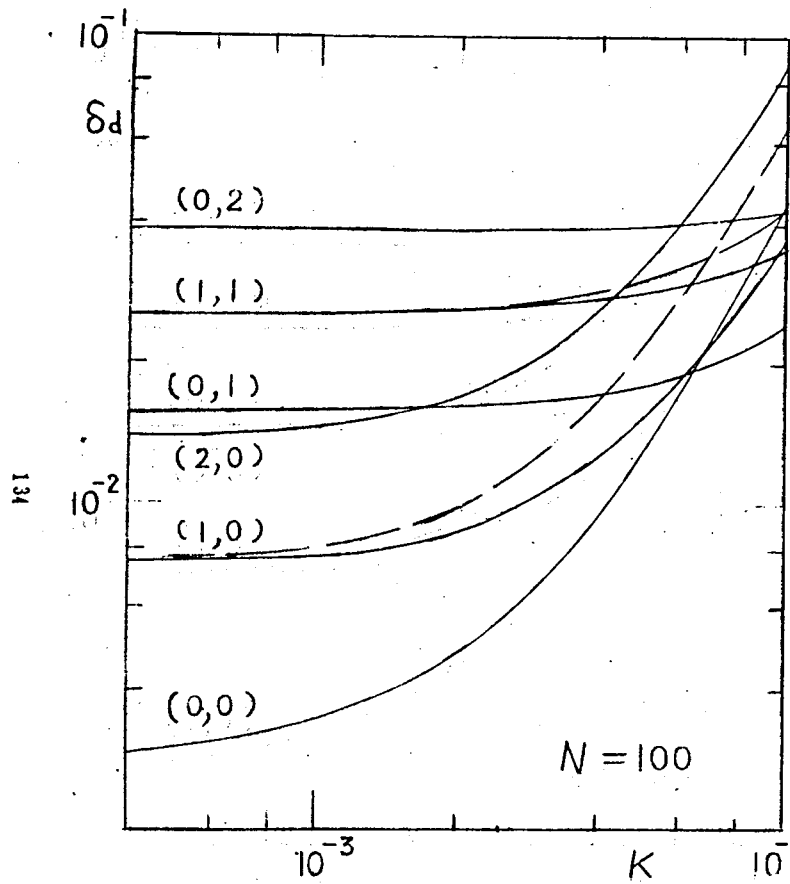
5・2図にKをパラメータとしてNと δ_d の関係を示す。Nが大きいときには傾斜の影響をうけやすい。5・3図aには $N=10$ のときの、bには $N=100$ のときの、Kと δ_d の関係を示す。K, Nの積が1に近づくと余り信頼できないが、5・3図より、傾斜角の増大とともに、(0, 0)モードの損失は急激に増加して、(1, 0), (0, 1)モードのそれらと比較的近い値となることわかる。

ここで(5・25)で与えられる傾斜パラメータKの意味を考える。次節で証明するように、Kは一方の鏡を変形していないものとして、これを基準系にとったときの、他方の鏡の最大傾斜を与えるパラメータである。また cos, sin モードを分離する、(5・35)で与えられるモード軸は、その基準系で見た

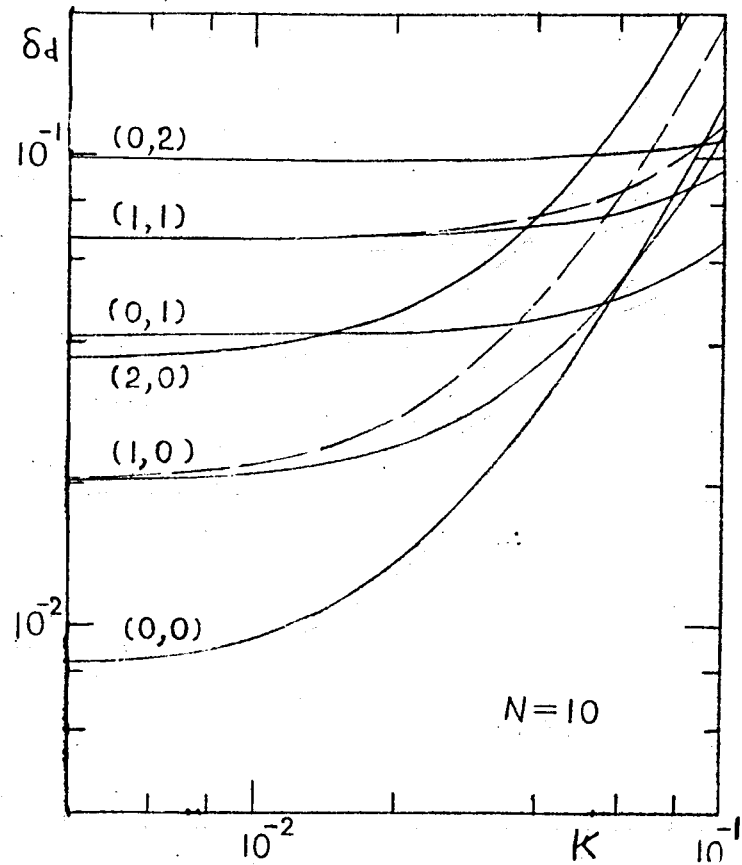
最大傾斜の方向を与えるものである。



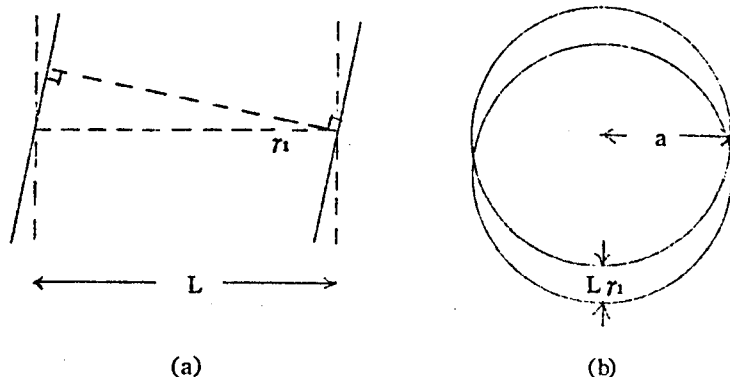
5・2図 K をパラメータとした両鏡傾斜の回折損失
(1,0)モードに対しては実線はsinモード,破線はcosモード



5・3図b 両鏡傾斜の回折損失 $N=100$
 $\ell=1$ のモードに対しては、
 実線は sin モード、破線は cos モード



5・3図a 両鏡傾斜の回折損失 $N=10$
 $\ell=1$ のモードに対しては
 実線は sin モード、破線は cos モード



5・4図 鏡が平行傾斜したファブリ・ペロー共振器

この結果は、5・4図aのように、両鏡が同じ方向に同じ角度だけ傾斜した場合は ($K_1=K_2$, $\beta_1=\beta_2$), $K=0$ となって損失は増加しないことを意味する。しかし、このとき両鏡の平行性は不変であるが、相向い合った両鏡の面積は減少しているから、当然、回折損失は増加するものと思われる。しかしこの損失増加分は相対的に非常に小さいことを次に示す。共振器として有効な鏡の面積が両鏡の相向い合っている部分のみと考えると、この面積は、5・4図bに示すように、およそ πa から $\pi a(a-Lr_1)$ に減少する。ただし r_1 , r_2 は鏡1, 2の傾斜角であって、現在の場合平行傾斜であるから、両者は等しく、

$$r_1=r_2=K_1\lambda/a=K_2\lambda/a \quad (5 \cdot 51)$$

の関係がある。したがって、フレネル数 N は実質的に $a^2/L\lambda$ から $a(a-Lr_1)/L\lambda$ になったとして、(5・50)の第1項は次のように変化する。

$$\begin{aligned} \delta_d &= A_{\ell m} \left\{ a(a-Lr_1)/L\lambda \right\}^{-3/2} \\ &\cong A_{\ell m} (a^2/L\lambda)^{-3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{Lr_1}{a} \right) \\ &= A_{\ell m} N^{-3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{K_1}{N} \right) \end{aligned} \quad (5 \cdot 52)$$

ここで (5・51) を考慮した。本章では $K_1/N \ll 1$ の条件は十分満たされ

ているとしているから、(5・52)の()内の第2項で表わされる、両鏡の相向いあった面積の減少による付加損失は無視してよい。これに反して、

(5・50)の第2項の傾斜変形による付加損失 $B_{\ell m} K^2 N^{-1/2}$ は、5・2図、5・3図に示したように、第1項 $A_{\ell m} N^{-3/2}$ に比べて無視しえない値をとる。

(5・50)では K_1 , K_2 の自乗の項までを考慮したものである。その結果として、(5・50)は K という単一のパラメータのみで表わされ、また、 $\ell = 1$ のモードのみ \cos , \sin モードの縮退がとれた。もし K_1 , K_2 の4乗の項までを考慮するならば、 $\ell = 2$ のモードについても \cos , \sin モードの縮退がとれるであろう。また、パラメータ K 以外に、鏡1, 2の傾斜方向を示す β_1 , β_2 に依存する回折損失を示すかもしれない。

§5・5 傾斜パラメータ K の意味

(1) K は一方の鏡を基準にしたときの他方の鏡の最大変形であることの証明

次の3つの座標系を考える。変形しない共振器の軸を z 軸として、この共振器に固定した座標系を (x, y, z) とする。鏡1の鏡軸(鏡に垂直で鏡の中心を通る線)を z_1 軸として、鏡1に固定した座標系を (x_1, y_1, z_1) とする。同様に、鏡2の鏡軸を z_2 軸として、鏡2に固定した座標系を (x_2, y_2, z_2) とする。鏡1の変形は、その鏡軸を、 (x, y, z) 系に対して、天頂角 r_1 , 方位角 β_1 の方向へ回転したものとする。このとき両座標系の間には次の関係がある。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos r_1 \cos \beta_1 & \cos r_1 \sin \beta_1 & -\sin r_1 \\ -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ \sin r_1 \cos \beta_1 & \sin r_1 \sin \beta_1 & \cos r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5 \cdot 53)$$

同様に、鏡2の変形は、その鏡軸を天頂角 r_2 , 方位角 β_2 の方向へ回転したものとする。このとき両座標系の間には、(5・53)で脚符1を2におきかえた関係が成立する。この関係を逆に書くと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos r_2 \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & \sin r_2 \cos \beta_2 \\ \cos r_2 \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & \sin r_2 \sin \beta_2 \\ -\sin r_2 & 0 & \cos r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (5 \cdot 54)$$

(5・54) を (5・53) に代入して, z_1 を (x_2, y_2, z_2) 系で表わすと,

$$\begin{aligned} z_1 = & \{\sin r_1 \cos r_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) - \cos r_1 \sin r_2\} x_2 \\ & + \sin r_1 \sin(\beta_1 - \beta_2) y_2 \\ & + \{\sin r_1 \sin r_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + \cos r_1 \cos r_2\} z_2 \end{aligned} \quad (5 \cdot 55)$$

となる。(5・55) の z_2 の係数が, 鏡2を基準系とした鏡1の傾斜角の余弦を示す。この傾斜角を r であらわして, $r \ll 1$ と仮定する。

$$\cos r = \sin r_1 \sin r_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + \cos r_1 \cos r_2 \quad (5 \cdot 56)$$

より

$$r^2 = r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + r_2^2 \quad (5 \cdot 57)$$

を得る。ここで, 次式で,

$$\left. \begin{aligned} K &\equiv a r / \lambda \\ K_1 &\equiv a r_1 / \lambda \\ K_2 &\equiv a r_2 / \lambda \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 58)$$

(5・57) の傾斜角を傾斜パラメータに変換すると, 次式を得る。

$$K^2 = K_1^2 - 2 K_1 K_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + K_2^2 \quad (5 \cdot 59)$$

これは (5・25) とまったく同じ式である。したがって, K は, 一方の鏡を基準にしたときの, 他方の鏡の最大変形である。

(2) (5・35) で与えられるモード軸は, 一方の鏡を基準としたときの, 他方の鏡の最大傾斜方向に一致することの証明

z_1 は鏡1の鏡軸を示す。鏡2に固定した座標系 (x_2, y_2, z_2) による, 鏡1の鏡軸の方位角 η' の正接を求める。この η' は最大傾斜方向の方位角と一致する。(5・55) の x_2, y_2 の係数の比より,

$$\tan \eta' = \frac{\sin r_1 \sin 2\beta}{\sin r_1 \cos r_2 \cos 2\beta - \cos r_1 \sin r_2} \quad (5 \cdot 60)$$

を得る。ただし (5・21) のように $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = -\beta$ とおいた。 $r_1, r_2 \ll 1$ として (5・58) を用いると, (5・60) は次式となる。

$$\tan \eta' = \frac{K_1 \sin 2\beta}{K_1 \cos 2\beta - K_2} \quad (5 \cdot 61)$$

一方, (5・35) で表わされるモード軸 η は, (x_2, y_2, z_2) の座標系で

みると、方位角 β だけ回転する。したがって正接の和の公式と (5・35) を使って、鏡 2 を基準系としてみたモード軸の方位角の正接は

$$\tan(\eta + \beta) = \frac{K_1 \sin 2\beta}{K_1 \cos 2\beta - K_2} \quad (5 \cdot 62)$$

となる。これは最大傾斜方向を示す (5・61) と一致する。

第 6 章 結 論

本論文では、平行円型平面鏡をもつファブリ・ペロー共振器の励振問題を、波動方程式の境界値問題として解析した。また、これを基礎にして、鏡が微小透過率を有する場合、結合孔をもつ場合、両鏡が傾斜した場合の共振器の励振問題あるいは自由振動モードを解析した。以下に各章で得た成果を要約する。

第 2 章では、完全反射鏡よりなる共振器の強制励振を解析した。これは以後の各章の解析の基礎となるものである。強制励振源は一方の鏡の中心部にあるものとした。共振器を内、外部に分け、両領域で場を適当なグリーン関数を使って表わした。境界面で両領域の場をなめらかにつなぐことにより連立積分方程式を得て、これを無限次元の連立一次方程式に帰着させた。電子計算機を使ってこれを解いて、励振特性すなわち励振源の周波数の変化に対する開口面より輻射されるパワーの変化を求めた。また、共振器内部の場の分布を振幅分布と位相分布の形で示した。次に、近似解析により、共振曲線の形を簡単な数式で示した。最後に、共振器内部の媒質の屈折率に虚数部を考えることにより、減衰および増幅のある場合の励振特性を得た。

第 3 章では、一方の鏡が微小透過率をもっているとして、これを通して外部より平面波を入射させて励振する問題を取りあげた。第 2 章と同様に共振器を内、外部に分けるとともに、入射波の存在する領域を別に考えた。透過鏡を通しての境界条件を考えて、共振器内部の場を入射波を用いて表わした。以後は第 2 章と同様に、境界面で場を接続して解を求めた。平面波が鏡に垂直および微小傾斜して入射する場合を取扱い、励振特性および内部の場の分布を計算した。傾斜入射の場合は、回転対称性が失われて、角方向に異なる種々のモードが励振される。透過率あるいは傾斜角と励振特性の関係および場の分布との関係を図示した。特別の場合として、励振源のない自由振動モードを取扱い、共振器の損失が回折損失と透過損失の和となる結果を得て、この理論の定式化の正しさを確認した。

第 4 章では、片方あるいは両方の鏡の中心に結合孔を有する場合の励振問題および自由振動問題を解析した。結合孔を含む部分に第 3 の領域を考えた。共

振器内、外部の場の連続性と、同時に、第3の領域と共振器内部の領域の場の連続性から、第2章の2倍の要素をもった、無限次元の連立一次方程式を得た。この自由振動モードを求めて、孔による回折損失の増加および内部の場の分布を計算した。鏡の中心に孔を有するために、角方向の分布の異なるモードが殆んど縮退状態に近いことが分った。

第5章では、両方の円板鏡が異なる方向へ異なる角度だけ傾斜した共振器の自由振動モードの回折損失を求めた。傾斜の効果は等価的に励振源とおきかえることができた。傾斜の2次の項までを問題にしたとき、傾斜による回折損失の増加は1つの傾斜パラメータで議論できることが分った。このパラメータは、一方の鏡を傾斜していないと考えて基準にとったときの、他方の鏡の傾斜の度合を示すものであった。平行鏡に比べての回折損失の増加分は、この傾斜パラメータの自乗とフレネル数の平方根の積に比例する結果を得た。

謝 辞

本研究は京都大学工学部池上淳一教授の御指導の下に行なったものである。終始適切な御指導御鞭撻を下さった池上教授に厚く御礼申し上げます。また終始懇切な御指導御討論を頂いた小倉講師に心から感謝致します。また本学大学院在学中第2章の研究に協力して頂いた巖本巖氏に御礼申し上げます。さらに研究に際し色々御助力下さった池上研究室関係者一同に御礼申し上げます。

付録 1・1 マイクロ波，ミリ波における ファブリ・ペロー共振器に関する実験

ミリ波を中心とする波長領域でのファブリ・ペロー共振器の実験が多くの研究者により行われている。^{35), 54), 61)~75)}それら種々の実験の目的は色々あり，列挙すると，ミリ波に対する高いQの共振器を得ること，レーザ共振器のモデル実験を取扱い易い波長帯で行うこと，ビーム導波系の基礎実験を行うこと，周波数，誘電率，ガス密度，プラズマ密度の測定を行うこと等である。

次にこれらの実験の共振器の構造，材料等について述べる。ミリ波領域では球面鏡の製作が困難であることもあって平面鏡の使用が多い。鏡の機能から分けると，透過性のあるものとなないものになる。透過性を有しないものはアルミ板および真ちゅう板にアルミメッキまたは銀メッキしたものが使われる。透過性を有するものは大きく分けて2種類ある。一つは誘電体を使うものつまり高い誘電率の誘電体と空気を $\frac{1}{4}$ 波長厚毎に重ね合せたものである。他は金属に多くの孔をあけた板を数枚重ねたもの，あるいは金属棒を規則正しく並べたもので，誘導性または容量性の性質をもつ。材料はアルミ板を用いたり，石英板にアルミを photoetch したものをを用いる。

反射鏡の寸法は使用波長によって色々であるが最大2 m程度である。反射鏡が大きくなると円型より正方形のものが多くなる。反射鏡の間隔も色々であるが，フレネル数は1～100程度である。少くとも一方の反射鏡は可動になっている。球面鏡を使用する場合でも一方の鏡は平面鏡のことが多い。

研 究 者 文献番号	鏡				波長 mm	励 振 方 法	フレネ ル数	目的その他
	半径cm	間 隔 cm	曲率半 径 cm	材料他				
Culshaw 65)	1 4		平 面	誘電体	8.3	ホーン		鏡間隔を変えて励振曲線を描く
Culshaw 66)	8～ 1 5		平 面	孔あき板， ロッド	6.3	ホーン	10～ 100	
Scheibe 59)	9 5 角	300	平 面		3 2	同軸線	9.4	周波数を変えて励振曲線を描く
Zimmerer 68)	5～ 1 0	10～ 100	平， 球 (50)	平-真ちゅう 球-石英	4～8	導波管		間隔を変えてQを測定
Koppelman 35, 61, 62)	3 0 角		平 面	誘電体	3 2	ホーン	0.5～ 30	傾斜入射，位相板挿入の場の分布測定

研 究 者	鏡				波長 mm	励振方法	フレネ ル数	目的その他
	半径 cm	間隔 mm	曲 率 半径cm	材料他				
Westerman 63,64)			平,球	孔アキ銅箔	4~8	放物面	1~ 30	Q測定
Primich 他 71)	12		12	アルミ板	4	ホーン,導波管		Q測定, プラズマ診断
Welling 他 70)	11		平 面	アルミ	4.3			間隔を変えてQを 測定
滝山他 72)	7~ 20	80~ 200	100, 200	アルミ板	6	導波管	0.5 ~5	励振曲線,場の分 布を測定
Checcacci他 74,75)	75 角	300	平 面	アルミ板	30	鏡中心にアンテナ	6.25	75)は屋根型
榎戸他 54)	14	32.4	球	一次元鏡	32	導波管		反射係数測定

1・1 表 ファブリ・ペロー共振器の実験関係の研究

励振方法は大別して2種類ある。一つは透過性を有する反射鏡の場合で、ホーンから出た波を一方の透過鏡を通して入射させ、他方の透過鏡を通してホーンで出力を検知する。ホーンと鏡の間にレンズを入れるものもある。ホーンの代りに放物面をおき焦点にアンテナをおくものもある。もう一つの励振方法は鏡に孔をあけて導波管と結合するものである。通常は一方の鏡を入力側として他方の鏡を出力側とするが、出力側の導波管のないものもある。後者の場合入力側に方向性結合器を入れて反射波を検出する。また一方の鏡に入力と出力の両方の結合孔が存在する実験もある。波長は大体2~30mmでクライストロンを使うことが多い。

振幅分布の測定法として次の3種類がある。1つは、透過鏡の場合で、出力側^{35), 61), 62)}の鏡の裏で測定する方法である。2番目は、共振器に小さな吸収体を入れて、出力の変動を測定する方法である⁷²⁾。この場合吸収体は波長より小さく、また回折損失等に比して損失が小さいことが要求される。3番目は、出力側の鏡に小さな孔をあけて、その鏡を横方向に移動させて測定する方法である⁷¹⁾。この孔は、場の分布を乱さないように、波長に比して小さくしなければならない。Qの測定は周波数を変化させて共振の半値幅を求めて計算する。

位相分布の測定はファブリ・ペロー共振器に関してはなされていないようであるが、マイクロ波レンズの収差測定^{76), 77)}に関してなされたものがある。これはレ

ンズを通して得た出力を，入力の一部を直接とり出した基準位相と比較したものである。これを用いれば共振器の鏡裏で位相分布の測定が可能と思われる。

最後にファブリ・ペロー共振器の実験に関する主な研究者とその研究内容，実験装置等を 1・1 表に示す。

付録 2・1 行列要素の計算

(2・34) で定義された $I_{nm}(\kappa)$ は, (2・8), (2・33) の A_n, A (再掲)

$$A_n^2 = (ka)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2, \quad (\text{A2} \cdot 1)$$

$$A^2 = (ka)^2 - \kappa^2 \quad (\text{A2} \cdot 2)$$

を使って, 次のように書換えられる。ここで A_n^2, A^2 は正のみならず負にもなることに注意する。

$$I_{nm}(\kappa) = ka \cdot \frac{1 - \cos\left(\kappa \frac{L}{a} - n\pi\right)}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 - \kappa^2\right] \left[\left(\frac{m\pi a}{L}\right)^2 - \kappa^2\right]} \cong ka \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{A_n^2 - A^2}{4\pi N}\right)}{(A_n^2 - A^2)(A_m^2 - A^2)} \quad (\text{A2} \cdot 3)$$

ただし, ここで次の変形を使った。

$$\begin{aligned} A_n^2 - A^2 &= \left(\kappa + \frac{n\pi a}{L}\right) \left(\kappa - \frac{n\pi a}{L}\right) \\ &\cong 4\pi N \left(\kappa \frac{L}{a} - n\pi\right) \end{aligned} \quad (\text{A2} \cdot 4)$$

上式では, m, n は十分大きい整数でかつ $m/n \cong 1$ であるとして, 行列要素の積分 (2・29) ~ (2・32) に寄与するのは, (A2・3) の $I_{nm}(\kappa)$ の分母が 0 の付近であることを利用して近似を行った。これはまた $\kappa \cong ka$, したがって, $|A^2/(ka)^2| \ll 1$ の付近のみ積分変数に寄与していることを意味する。

次に (A2・2) により積分変数を κ から A に変換する。積分領域は κ と ka の大小関係によって 2 部分に分れる。 $\kappa > ka$ の領域では A の偏角を $\pi/2$ だけ変化させると,

$$d\kappa = -\frac{A dA}{\sqrt{(ka)^2 - A^2}} \quad ; \quad \kappa \leq ka \quad \left. \vphantom{\frac{A dA}{\sqrt{(ka)^2 - A^2}}} \right\} (\text{A2} \cdot 5)$$

$$d\kappa = \frac{A dA}{\sqrt{(ka)^2 + A^2}} \quad ; \quad \kappa \geq ka$$

である。積分領域は前者では $(0, ka)$ 、後者では $(0, \infty)$ となる。先述の如く、 $A^2 \ll (ka)^2$ のみ積分に寄与するから $\sqrt{(ka)^2 \pm A^2} \cong ka$ と近似でき、 $\kappa < ka$ のときの積分範囲 $(0, ka)$ は $(0, \infty)$ としてよい。(2・29)～(3・32)の行列要素の積分中、 $A^2 \ll (ka)^2$ において、円筒関数は (A2・3) で与えられる $I_{nm}(\kappa)$ に比べて、 A に関してはるかに急激に変化するので、円筒関数としては漸次展開を用いて、その振動部分を平均値におきかえてさしつかえない。この近似が成立するのは (A2・3) の \cos 中に含まれる $4\pi N$ が

$$\alpha^2 \cong \frac{1}{4\pi N} \ll 1 \quad (A2 \cdot 6)$$

の条件を満たすときである。この結果 (2・29)～(2・32) は次のようになる。

$$\begin{aligned} K_{nm} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_m^2 - A^2)} dA \\ & - i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 + A^2)}{(A_n^2 + A^2)(A_m^2 + A^2)} dA \end{aligned} \quad (A2 \cdot 7)$$

$$\begin{aligned} L_{nm} = & - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_m^2 - A^2)} dA \\ & - i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_m^2 - A^2)} A dA \\ & - i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 + A^2)}{(A_n^2 + A^2)(A_m^2 + A^2)} \left(A - \frac{1}{2}\right) dA \end{aligned} \quad (A2 \cdot 8)$$

$$\begin{aligned} M_{nm} = & - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_m^2 - A^2)} dA \\ & + i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_m^2 - A^2)} A dA \\ & + i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 + A^2)}{(A_n^2 + A^2)(A_m^2 + A^2)} \left(A + \frac{1}{2}\right) dA \end{aligned} \quad (A2 \cdot 9)$$

$$N_{nm} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_m^2 - A^2)} A^2 dA \\ + i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 + A^2)}{(A_n^2 + A^2)(A_m^2 + A^2)} A^2 dA \quad (A2 \cdot 10)$$

円筒関数は漸近展開を用いたので、行列要素は次数 ℓ に無関係である。そのために行列要素 K_{nm}^ℓ 等を K_{nm} 等と肩符 ℓ を省いて記す。

ここで行列要素の計算結果の表示を簡単化するために、次の関数を定義する。

$$\left. \begin{aligned} s(t) &\equiv \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\alpha \sin(tx^2) dx, \\ c(t) &\equiv \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\alpha \cos(tx^2) dx \end{aligned} \right\} \quad (A2 \cdot 11)$$

ただし、 $s(t)$ 、 $c(t)$ はパラメータ α の関数であるが、後の便宜のためにパラメータ t のみを変数として示し、 α はあらわに書かないでおく。 $s(t)$ 、 $c(t)$ の微分形は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} s'(t) &\equiv \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \frac{\alpha}{2t} \sin t\alpha^2 - \frac{1}{2t} s(t), \\ c'(t) &\equiv \frac{dc}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \frac{\alpha}{2t} \cos t\alpha^2 - \frac{1}{2t} c(t) \end{aligned} \right\} \quad (A2 \cdot 12)$$

上式の結果は部分積分によって得られる。定義から明らかなように、 $s(t)$ 、 $c'(t)$ は奇関数、 $c(t)$ 、 $s'(t)$ は偶関数である。

$$s(-t) = -s(t), \quad c(-t) = c(t), \quad (A2 \cdot 13)$$

$$s'(-t) = s'(t), \quad c'(-t) = -c'(t). \quad (A2 \cdot 14)$$

次に (A2・7) ~ (A2・10) の行列要素中に含まれる積分を $s(t)$ 、 $c(t)$ を用いて表現する。

(1) 次の公式が成立する。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{A_n^2 - A^2} dA = s(A_n^2) - c(A_n^2), \quad (A2 \cdot 15)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{A_n^2 - A^2} dA = s(A_n^2) + c(A_n^2) \quad (A2 \cdot 16)$$

証明：次の積分公式⁶⁰⁾

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{\sin x^2 A^2}{\cos x^2 A^2} \right\} dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2x} \quad (\text{A2} \cdot 17)$$

を用いると次の両式が成立する。

$$\int_0^\infty \sin x^2 (A_n^2 - A^2) dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x^2 A_n^2}{2x} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\cos x^2 A_n^2}{2x}, \quad (\text{A2} \cdot 18)$$

$$\int_0^\infty \cos x^2 (A_n^2 - A^2) dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\cos x^2 A_n^2}{2x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin x^2 A_n^2}{2x} \quad (\text{A2} \cdot 19)$$

両辺を、 x^2 に関して、 $(0, \alpha^2)$ で積分すると、(A2・15)，(A2・16)を得る。

(2) $n \neq m$ のとき次の公式が成立する。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_m^2 - A^2)} dA = \frac{1}{A_m^2 - A_n^2} [\{s(A_n^2) - c(A_n^2)\} - \{s(A_m^2) - c(A_m^2)\}] \quad (\text{A2} \cdot 20)$$

証明： $\alpha^2 (A_n^2 - A_m^2) = 2\pi(m - n)$ であることを用いて、左辺を部分分数に分解し、(A2・15)を用いる。

(3) (A2・20)の左辺で $n = m$ のとき次の公式が成立する。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)^2} dA = \alpha^2 \{s(A_n^2) + c(A_n^2)\} - \{s'(A_n^2) - c'(A_n^2)\} \quad (\text{A2} \cdot 21)$$

証明：(A2・15)の両辺を A_n^2 で微分して、(A2・16)を用いる。

(4) 次の公式が成立する。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)(A_m^2 - A^2)} A^2 dA = \frac{1}{A_m^2 - A_n^2} [A_n^2 \{s(A_n^2) - c(A_n^2)\} - A_m^2 \{s(A_m^2) - c(A_m^2)\}] \quad (\text{A2} \cdot 22)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2)} A^2 dA$$

$$= \alpha^2 A_n^2 \{s(A_n^2) + c(A_n^2)\} - \{s(A_n^2) - c(A_n^2)\} - A_n^2 \{s'(A_n^2) - c'(A_n^2)\} \quad (\text{A2} \cdot 23)$$

証明： $A^2 = A_n^2 - (A_n^2 - A^2)$ と書いて、(A2・15)，(A2・20)，(A2・21)を用いれば得られる。

(5) 次の公式が成立する。(ただしこれはフレネル積分とは関係がない)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 - A^2)}{(A_n^2 - A^2) (A_m^2 - A^2)} A dA + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha^2 (A_n^2 + A^2)}{(A_n^2 + A^2) (A_m^2 + A^2)} A dA$$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha^2}{2} & ; \quad n = m \\ 0 & ; \quad n \neq m \end{cases} \quad (\text{A2} \cdot 24)$$

証明：次の公式を利用する。⁶⁰⁾

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \beta(x-a)}{x-a} \cdot \frac{\sin \beta(x-b)}{x-b} dx = \frac{\pi}{a-b} \sin \beta(a-b), \quad (\beta \geq 0) \quad (\text{A2} \cdot 25)$$

ここで $\alpha^2 (A_n^2 - A_m^2) = 2\pi(m-n)$ であることを考慮する。

以上の公式 (A2・20) ~ (A2・24) を用いて, (A2・7) ~ (A2・10) の行列要素 K_{nm} , L_{nm} , M_{nm} , N_{nm} を (2・36) ~ (2・43) のように書くことができる。

付録 2・2 行列要素のベキ展開

$\alpha^2 t \ll 1$ に対しては, $s(t)$, $c(t)$ は次のように展開される。これは定義式 (A 2・11) で, 被積分関数をベキ展開して, それを項別積分して求められる。

$$s(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha \left\{ \frac{\alpha^2 t}{3} - \frac{\alpha^6 t^3}{7 \cdot 3!} + \frac{\alpha^{10} t^5}{11 \cdot 5!} - \dots \right\}, \quad (\text{A 2} \cdot 26)$$

$$c(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha \left\{ 1 - \frac{\alpha^4 t^2}{5 \cdot 2!} + \frac{\alpha^8 t^4}{9 \cdot 4!} - \dots \right\}, \quad (\text{A 2} \cdot 27)$$

$\alpha^2 \Lambda_n^2 \ll 1$ の場合に, 上式を使って, 行列要素の対角要素を展開式で表わすと

$$K_{nn} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha^3 \left\{ \frac{2}{3} (1-i) + \frac{2}{15} \alpha^2 \Lambda_n^2 (1+i) + \dots \right\}, \quad (\text{A 2} \cdot 28)$$

$$L_{nn} = -\frac{1}{2} K_{nn} - i \frac{\alpha^2}{2}, \quad (\text{A 2} \cdot 29)$$

$$M_{nn} = -\frac{1}{2} K_{nn} + i \frac{\alpha^2}{2}, \quad (\text{A 2} \cdot 30)$$

$$N_{nn} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha \left\{ (1+i) + \frac{1}{3} \alpha^2 \Lambda_n^2 (1-i) + \dots \right\} \quad (\text{A 2} \cdot 31)$$

となる。

付録 3・1 誘電体多層膜鏡の基準面

多層膜の両端面での場とその法線微係数を脚符 e, i をつけて表わすと、一般に、

$$\begin{pmatrix} \varphi_e \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A3} \cdot 1)$$

と書き表わせる。媒質が無損失の場合には、 a, b, c, d は実数で

$$ad - bc = 1 \quad (\text{A3} \cdot 2)$$

の関係がある。ここで対角要素が 0 となるように、両端面をそれぞれ右へ ℓ , ℓ' だけ移動した位置に基準面をとり、そこでの場を (\cdot) をつけて表わす。その結果は

$$\begin{pmatrix} \varphi'_e \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varphi'_e}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos r & -\sin r \\ \sin r & \cos r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_i \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A3} \cdot 3)$$

である。ただし

$$\left. \begin{aligned} \beta &\equiv k_0 \ell \\ r &\equiv k_0 \ell' \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3} \cdot 4)$$

とおいた。(A3・3)の右辺の行列の対角要素が 0 となるように、 β, r を定めることができるかどうかを調べる。(1, 1)要素と(2, 2)要素をとり出して、それらを 0 とおくと

$$a \cos \beta \cos r + b \cos \beta \sin r + c \sin \beta \cos r + d \sin \beta \sin r = 0 \quad (\text{A3} \cdot 5)$$

$$a \sin \beta \sin r - b \sin \beta \cos r - c \cos \beta \sin r + d \cos \beta \cos r = 0 \quad (\text{A3} \cdot 6)$$

である。両式より $\tan r$ を消去すると、次の $\tan \beta$ を決定する式となる。

$$(ac + bd) \tan^2 \beta + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \tan \beta - (ac + bd) = 0 \quad (\text{A3} \cdot 7)$$

この式の判別式は 0 または正であるから、 $\tan \beta$ は必ず実根を有する。同様に $\tan r$ を決定する式は

$$(ab+cd)\tan^2 r + (a^2-b^2+c^2-d^2)\tan r - (ab+cd) = 0 \quad (\text{A3} \cdot 8)$$

であり、 $\tan r$ は常に実根を有する。また逆に、(A3・7)、(A3・8) を満たす $\tan \beta$, $\tan r$ の適当な組合せは (A3・5)、(A3・6) を満たすことは容易に判るから、対角要素を 0 とするように基準面を定めることは常に可能である。すなわち常に

$$\begin{pmatrix} \varphi'_e \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varphi'_e}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b' \\ -1/b' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_i \\ \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A3} \cdot 9)$$

を成立させることができる。ここで無損失条件 (A3・2) を用いた。したがって、(3・3)、(3・4) の透過鏡の境界条件は、鏡面を少し仮想的にずらした位置を基準とすることにより、常に成立している。

付録 3・2 積 分 1

$$\int_0^{2\pi} \exp(iz \cos \theta) \cos \ell \theta \, d\theta = 2\pi i^\ell J_\ell(z) \, , \quad (\text{A3} \cdot 10)$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(iz \cos \theta) \sin \ell \theta \, d\theta = 0 \, , \quad (\text{A3} \cdot 11)$$

$$\begin{aligned} & Q_\ell(\alpha, \beta, \frac{r}{a}) \\ & \equiv \frac{1}{a^2} H_\ell(\beta \frac{r}{a}) \int_0^r J_\ell(\beta \frac{r'}{a}) J_\ell(\alpha \frac{r'}{a}) r' \, dr' \\ & \quad + \frac{1}{a^2} J_\ell(\beta \frac{r}{a}) \int_r^a H_\ell(\beta \frac{r'}{a}) J_\ell(\alpha \frac{r'}{a}) r' \, dr' \\ & = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{r}{a} \beta J_\ell(\alpha \frac{r}{a}) \{ H_\ell(\beta \frac{r}{a}) J'_\ell(\beta \frac{r}{a}) - J_\ell(\beta \frac{r}{a}) H'_\ell(\beta \frac{r}{a}) \} \right. \\ & \quad \left. + J_\ell(\beta \frac{r}{a}) \{ \beta H'_\ell(\beta) J_\ell(\alpha) - \alpha H_\ell(\beta) J'_\ell(\alpha) \} \right] \\ & = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[J_\ell(\beta \frac{r}{a}) \{ \beta H'_\ell(\beta) J_\ell(\alpha) - \alpha H_\ell(\beta) J'_\ell(\alpha) \} - \frac{2i}{\pi} J_\ell(\alpha \frac{r}{a}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A3} \cdot 12)$$

ただし 2 行目から 3 行目の変形の際に次の不定積分を使った。

$$\begin{aligned} & \int J_\ell(\alpha x) H_\ell(\beta x) x \, dx \\ & = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\alpha J_{\ell+1}(\alpha x) H_\ell(\beta x) - \beta J_\ell(\alpha x) H_{\ell+1}(\beta x) \right] \end{aligned} \quad (\text{A3} \cdot 13)$$

付録 3・3 積 分 2

$P_\ell(\alpha, \beta)$ の定義式 (3・56) にしたがって次の積分を書換える。

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^\infty P_\ell(\alpha, \beta) P_\ell(\alpha, r) \alpha \, d\alpha \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 J_\ell(\alpha x) J_\ell(\beta x) x \, dx \int_0^1 J_\ell(\alpha y) J_\ell(r y) y \, dy \alpha \, d\alpha \quad (\text{A3} \cdot 14) \end{aligned}$$

ここで，積分の順序を変更して，次の関係を利用すると

$$\int_0^\infty J_\ell(\alpha x) J_\ell(\alpha y) \alpha \, d\alpha = \frac{\delta(x-y)}{x} \quad (\text{A3} \cdot 15)$$

次の結果を得る。

$$I = P_\ell(\beta, r) \quad (\text{A3} \cdot 16)$$

付録3・4 積 分 3

$$I \equiv \int_0^\infty P_\ell(\alpha, r) Q_\ell(\alpha, \beta, z) \alpha d\alpha \quad (\text{A3} \cdot 17)$$

を求める。ここで $P_\ell(\alpha, r)$, $Q_\ell(\alpha, \beta, z)$ をそれらの定義式 (3・56), (3・54) にしたがって書換える。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^1 J_\ell(\alpha x) J_\ell(rx) x dx \int_0^1 \left\{ \frac{H_\ell(\beta z) J_\ell(\beta y)}{J_\ell(\beta z) H_\ell(\beta y)} \right\}_{z < y}^{z > y} J_\ell(\alpha y) y dy \cdot \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 J_\ell(ry) \left\{ \frac{H_\ell(\beta z) J_\ell(\beta y)}{J_\ell(\beta z) H_\ell(\beta y)} \right\}_{z < y}^{z > y} y dy \\ &\equiv Q_\ell(r, \beta, z) \end{aligned} \quad (\text{A3} \cdot 18)$$

ただし、上式の変形において、積分の順序を変更して、(A3・15)を利用した。

付録 5・1 積 分 4

(1) (5・14) の積分の証明

鏡の変形が波長に比べて小さいとき、(5・6) で定義される u_ℓ^ρ に関して次の近似式が成立する。

$$\left[\frac{\partial u_k^\rho}{\partial n} \right]_{\sigma_1} \cong - \left[\frac{\partial u_k^\rho}{\partial z} \right]_{z=0} , \quad (\text{A5} \cdot 1)$$

$$\left[u_k^\rho \right]_{\sigma_1} \cong z_1(r, \theta) \left[\frac{\partial u_k^\rho}{\partial z} \right]_{z=0} \quad (\text{A5} \cdot 2)$$

$z_1(r, \theta)$ は (5・12) で与えられる、鏡 1 の傾斜変形を表わす式である。

(A5・1), (A5・2) を使うと求める積分は

$$\int_{\sigma_1} u_k^\rho \frac{\partial u_k^\tau}{\partial n} d\sigma_1 \cong - \int \left[\frac{\partial u_k^\rho}{\partial z} \right]_{z=0} \cdot \left[\frac{\partial u_k^\tau}{\partial z} \right]_{z=0} \cdot z_1(r, \theta) r dr d\theta \quad (\text{A5} \cdot 3)$$

となる。同様にして鏡 2 の変形による積分は、鏡 2 の傾斜を表わす (5・13) を含む次の形に書ける。

$$\int_{\sigma_2} u_k^\rho \frac{\partial u_k^\tau}{\partial n} d\sigma_2 \cong \int \left[\frac{\partial u_k^\rho}{\partial z} \right]_{z=L} \cdot \left[\frac{\partial u_k^\tau}{\partial z} \right]_{z=L} \{ z_2(r, \theta) - L \} r dr d\theta \quad (\text{A5} \cdot 4)$$

したがって、鏡 1, 2 を一般的に i であらわして、(5・6) の u_ℓ^ρ の定義式を使って積分を行うと

$$\int_{\sigma_i} u_k^\rho \frac{\partial u_k^\tau}{\partial n} d\sigma_i \cong (-1)^i \frac{2n\pi^2 a^2 K_i}{L} \cdot D_{i k k'}^{\rho \tau} \quad (i=1, 2) \quad (\text{A5} \cdot 5)$$

と書ける。ただし

$$D_{i k k'}^{\rho \tau} \equiv \theta_{k k'}^{\rho \tau}(\beta_i) I_{k k'}(A) , \quad (\text{A5} \cdot 6)$$

$$\theta_{k k'}^{\rho \tau}(\beta_i) \equiv \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos}{\sin} k(\theta - \eta) \right\} \left\{ \frac{\cos}{\sin} k'(\theta - \eta) \right\} \cos(\theta - \beta_i) d\theta \quad (\text{A5} \cdot 7)$$

(A5・7) で、 $\rho = +$ または $-$ は、それぞれ積分中の最初の [] 内の \cos または \sin を採用することに対応し、 τ は同様に最後の [] 内のそれらに対

応する。(A5・7)の具体的な形は

$$\left. \begin{aligned} \theta_{kk'}^{++}(\beta_i) &= \frac{\pi}{2} \cos(\beta_i - \eta) \{ \delta_{k-k', 1} + \delta_{k-k', -1} + \delta_{k+k', 1} \} \\ \theta_{kk'}^{-+}(\beta_i) &= \frac{\pi}{2} \cos(\beta_i - \eta) \{ \delta_{k-k', 1} + \delta_{k-k', -1} - \delta_{k+k', 1} \} \\ \theta_{kk'}^{+-}(\beta_i) &= \frac{\pi}{2} \sin(\beta_i - \eta) \{ \delta_{k-k', 1} - \delta_{k-k', -1} + \delta_{k+k', 1} \} \\ \theta_{kk'}^{--}(\beta_i) &= \frac{\pi}{2} \sin(\beta_i - \eta) \{ -\delta_{k-k', 1} + \delta_{k-k', -1} + \delta_{k+k', 1} \} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A5} \cdot 8)$$

である。 $\delta_{k, k'}$ はクロネッカーの記号である。 $k' \neq k \pm 1$ ならば (A5・8) はすべて0である。また

$$I_{kk'}(A) = I_{k'k}(A) \equiv \int_0^1 J_k(Ax) J_{k'}(Ax) x^2 dx \quad (\text{A5} \cdot 9)$$

であって、 $k' = k + 1$ のとき、これは次のように積分できる。

$$I_{kk+1}(A) = \frac{1}{2A} [k \{J_k(A)\}^2 - (k+1) J_{k-1}(A) J_{k+1}(A)] \quad (\text{A5} \cdot 10)$$

(2) (5・15)の積分の証明

(A5・1), (A5・2)の近似式およびグリーン関数に関する次の近似式

$$\frac{\partial G(\sigma_1 | \sigma'_1)}{\partial n} \cong - \frac{\partial^2 G(\sigma_0 | \sigma'_0)}{\partial z} \cdot z_1(r', \theta') \quad (\text{A5} \cdot 11)$$

を用いると、与えられた積分は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_1} u_k^\rho(\sigma_1) \int_{\sigma'_1} \frac{\partial G(\sigma_1 | \sigma'_1)}{\partial n} \cdot \frac{\partial u_{k'}^\tau(\sigma'_1)}{\partial n'} d\sigma_1 d\sigma'_1 \\ & \cong \int_{\sigma_0} \left[\frac{\partial u_k^\rho}{\partial z} \right]_{z=0} \cdot z_1(r, \theta) \int_{\sigma'_0} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z'} \right]_{z=z'=0} \cdot \left[\frac{\partial u_{k'}^\tau}{\partial z'} \right]_{z'=0} \cdot z_1(r', \theta') d\sigma_0 d\sigma'_0 \quad (\text{A5} \cdot 12) \end{aligned}$$

同様に、 σ_2 の面上における積分は、 $z_2(r, \theta)$ を用いて変形できる。これらの積分は計算の結果次のようになる。

$$\int_{\sigma_i} u_k^\rho(\sigma_i) \int_{\sigma_j} \frac{\partial G(\sigma_i | \sigma_j')}{\partial n} \cdot \frac{\partial u_{k'}^\tau(\sigma_j')}{\partial n'} d\sigma_i d\sigma_j' \\ \cong (-1)^{i+j} \cdot \frac{2\pi^2 i a^4 K_i K_j}{L} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 A_{ij}^{\rho\tau} \quad (i, j=1, 2) \quad (A5 \cdot 13)$$

ただし

$$A_{ij}^{\rho\tau} \equiv \sum_k \epsilon_k [\theta_{\ell k}^{\rho+}(\beta_i) \cdot \theta_{k\ell'}^{+\tau}(\beta_j) + \theta_{\ell k}^{\rho-}(\beta_i) \cdot \theta_{k\ell'}^{-\tau}(\beta_j)] I_{\ell k \ell'}(A) \quad (A5 \cdot 14)$$

$\theta_{\ell k}^{\rho\tau}(\beta)$ は (A5・8) で与えられるもので、 $k \neq \ell \pm 1$ のときは0であるから、(A5・14) は $\ell' = \ell$ 、 $\ell \pm 2$ のときのみ0でない値をとる。角モード番号が2以上異なるものは考慮しないから、 $\ell' = \ell$ のみを考えればよい。

$I_{\ell k \ell}(A)$ は次式で定義される。

$$I_{\ell k \ell'}(A) \equiv \int_0^1 \int_0^1 J_\ell(Ax) \left\{ \begin{matrix} J_k(Ax) H_k(Ay) \\ H_k(Ax) J_k(Ay) \end{matrix} \right\}_{x>y}^{y>x} J_{\ell'}(Ay) x^2 dx y^2 dy \quad (A5 \cdot 15)$$

$\ell = \ell'$ のとき、上の積分の実数部は (A5・9) の $J_{\ell k}(A)$ を使って

$$R_e [I_{\ell k \ell}(A)] = \{I_{\ell k}(A)\}^2 \quad (A5 \cdot 16)$$

となる。虚数部は次のように書換えられる。

$$I_m [I_{\ell k \ell}(A)] = J_{\ell k}(A)$$

$$\equiv 2 \int_0^1 x^2 dx J_\ell(Ax) N_k(Ax) \int_0^1 J_k(Ay) J_\ell(Ay) y^2 dy \quad (A5 \cdot 17)$$

$k = \ell \pm 1$ のみを考慮すればよい。このとき次のように一重積分となる。

$$J_{\ell \ell+1}(A) = \frac{\ell}{A} \int_0^1 \{J_\ell(Ax)\}^3 N_{\ell+1}(Ax) x^4 dx \\ - \frac{(\ell+1)}{A} \int_0^1 J_{\ell-1}(Ax) J_\ell(Ax) J_{\ell+1}(Ax) N_{\ell+1}(Ax) x^4 dx, \quad (A5 \cdot 18)$$

$$J_{\ell \ell-1}(A) = \frac{(\ell-1)}{A} \int_0^1 \{J_{\ell-1}(Ax)\}^2 J_\ell(Ax) N_{\ell-1}(Ax) x^4 dx \\ - \frac{\ell}{A} \int_0^1 J_{\ell-2}(Ax) \{J_\ell(Ax)\}^2 N_{\ell-1}(Ax) x^4 dx \quad (A5 \cdot 19)$$

(A 5・18), (A 5・19) の積分は, 必要な λ の値に対して, 数値積分を行って求めた。

参 考 文 献

- 1) M. Born, E. Wolf: "Principles of Optics" 2nd Edition, Pergamon Press Oxford (1964)
- 2) A. L. Schawlow, C. H. Townes: Infrared and Optical Masers, Phys. Rev. 112 (1958) 1940
- 3) A. M. Prokhorov: J. E. T. P. 34 (1958) 1658
- 4) 小倉: レーザ共振器の自由振動モードの研究, (1966) 学位論文
- 5) 池上, 小倉: レーザ共振器の理論, 日本物理学会誌 20 (1965) 752
- 6) A. G. Fox, T. Li: Resonant Modes in a Maser Interferometer, Bell. Syst. Tech. J. 40 (1961) 453
- 7) G. D. Boyd, J. P. Gordon: Confocal Multimode Resonator for Millimeter through Optical Wavelength Masers, Bell. Syst. Tech. J. 40 (1961) 489
- 8) S. R. Barone: Resonances of the Fabry-Perot Laser, J. Appl. Phys. 34 (1963) 831
- 9) D. Slepian: Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty-IV, Bell. Syst. Tech. J. 43 (1964) 3009
- 10) W. Streifer, H. Gamo: On the Schmidt Expansion for Optical Resonator Modes, "Quasi-Optics" symposium proceedings, 14 Polytechnic press (1964) 351
- 11) L. Bergstein, H. Schachter: Resonant Modes of Optic Interferometer Cavities. I. Plane-Parallel End Reflectors, J. Opt. Soc. Amer. 54 (1964) 887
- 12) L. Bergstein, H. Schachter: Resonant Modes of Optic Cavities of Small Fresnel Numbers, J. Opt. Soc. Amer. 55 (1965) 1226
- 13) L. Bergstein, E. Marom: Angular Spectra of Optic Cavities, J. Opt. Soc. Amer. 56 (1966) 16
- 14) G. Goubau, F. Schwing: On the Guided Propagation of Electromagnetic Wave Beams, I.R.E. Trans. AP-9 (1961) 248

- 15) L. A. Vainshtein: Open Resonators for Lasers, Soviet Physics - JETP 17 (1963) 709
- 16) H. Ogura, Y. Yoshida: Cavity Theory of Fabry Perot Resonator, Japan J. Appl. Phys. 3 (1964) 546
- 17) 池上, 小倉, 吉田: Fabry Perot 共振器の空洞理論, 輻射科学研究会資料 (1964年5月)
- 18) H. Risken: Calculation of Laser Modes in an Active Perot-Fabry-Interferometer, Z.Phys. 180 (1964) 150
- 19) G. Ooms: The Modes of an Open Resonator with Plane Circular Mirrors, Appl. Sci. Res. 19 (1968) 198
- 20) G. Ooms: On the Electromagnetic Theorie of the Modes of an Open Resonator with Plane Circular Mirrors, Optik 27 (1968) 426
- 21) V.D. Gloge: Berechnung von Fabry-Perot-Laser-Resonatoren mit Streumatrizen, Archiv der Elektrischen Übertragung 18 (1964) 197
- 22) V.D. Gloge: Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung optischer Resonatoren und periodischer Linsensysteme, Archiv der Elektrischen Übertragung 20 (1965) 13
- 23) H. Ogura, Y. Yoshida, Y. Furuhashi, J. Ikenoue: Slight Deformation of Confocal Fabry Perot Resonator, Japan J. Appl. Phys. 5 (1966) 225
- 24) 池上, 小倉, 吉田, 古浜: 共焦点 Fabry Perot 共振器の微小変形, 輻射科学研究会資料 (1965年7月)
- 25) A. G. Fox, T. Li: Modes in a Maser Interferometer with Curved and Tilted Mirrors, Proc. I.E.E.E. 51 (1963) 80
- 26) H. Ogura, Y. Yoshida, J. Ikenoue: Theory of Deformed Fabry Perot Resonator, J. Phys. Soc. Japan 20 (1965) 598
- 27) 池上, 小倉, 吉田: 変形した Fabry Perot 共振器の理論, 輻射科学研究会資料 (1964年11月)
- 28) W. H. Wells: Modes of a Tilted-Mirror Optical Resonator for the Infrared, I.E.E.E. Jour. of Q.E. 2 (1966) 94

- 29) A. G. Fox, T. Li: Effect of Gain Saturation on the Oscillating Modes of Optical Masers, I.E.E.E. Jour. of Q. E. 2 (1966) 774
- 30) A. T. Fialkovskii: Open Resonators Formed by Flat Reflectors with Impedance Discontinuity at the Edges, Soviet Phys. - Tech. Phys. 11 (1966) 807
- 31) A. T. Fialkovskii: Coupled Oscillations in Diffraction - Coupled Open Resonators with Flat Reflectors, Soviet Phys. - Tech. Phys. 11 (1966) 813
- 32) L. Bergstein, T.H. Zachos: Fabry Perot Resonators in Uniaxially Anisotropic Media, I.E.E.E. Jour. of Q.E. 2 (1966) 677
- 33) 末松: 一軸性結晶を含むファブリ・ペロー共振器, 電子通信学会量子エレクトロニクス研究会資料 (1969年10月)
- 34) L.A. Vainshtein: The Excitation of Open Resonators, Soviet Phys.-Tech. Phys. 9 (1965) 1197
- 35) G. Koppelman: Mehrstrahlinterferenz und Eigenwellen in Parallelspiegel-Interferometer, Z.Phys. 188 (1965) 220
- 36) H. Ogura, Y. Yoshida, I. Iwamoto: Excitation of Fabry-Perot Resonator. I, J. Phys. Soc. Japan 22 (1967) 1421
- 37) 池上, 小倉, 吉田, 巖本: Fabry Perot 共振器の励振理論 - I. 輻射科学研究会資料 (1966年5月)
- 38) 池上, 小倉, 吉田, 巖本: ファブリ・ペロー共振器の励振理論, 電気通信学会量子エレクトロニクス研究会資料 (1966年7月)
- 39) 池上, 小倉, 吉田, 巖本: ファブリ・ペロー共振器の励振理論, 昭41電気通信学会全国大会 No 511
- 40) Y. Yoshida, H. Ogura, J. Ikenoue: Excitation of Fabry-Perot Resonator. III. Wave Incidence through Semi-Transparent Mirror, Japan J. Appl. Phys. 8 (1969) 1513
- 41) 吉田, 小倉, 池上: ファブリ・ペロー共振器の励振理論(3) — 半透鏡を通しての外部励振, 電子通信学会 量子エレクトロニクス研究会資料 (1968年2月)

- 42) 吉田, 小倉, 池上: 半透反射鏡を通してのファブリ・ペロー共振器
励振, 昭 42 電子通信学会全国大会 № 529
- 43) H. Ogura, Y. Yoshida, J. Ikenoue: Excitation of Fabry-Perot
Resonator. II. Free Oscillation, J. Phys. Soc. Japan 22
(1967) 1434
- 44) 池上, 小倉, 吉田: ファブリ・ペロー共振器の励振理論(2) 自由振動,
電気通信学会 量子エレクトロニクス研究会資料 (1966 年 9 月)
- 45) Y. Yoshida, H. Ogura, J. Ikenoue: Fabry-Perot Resonator with
Slightly Tilted Mirrors, Japan J. Appl. Phys. 8 (1969) 285
- 46) 吉田, 小倉, 池上: 変形したファブリ・ペロー共振器 (有孔鏡の場合
と両鏡傾斜の場合), 輻射科学研究会資料 (1968 年 9 月)
- 47) 吉田, 小倉, 池上: 両鏡の傾斜したファブリ・ペロー共振器の回折損
失, 昭 43 電子通信学会全国大会 № 550
- 48) 吉田, 小倉, 池上: 孔のあいたファブリ・ペロー共振器, 昭 43 電気
四学会連合大会 № 1360
- 49) A. G. Fox, T. Li: Computation of Optical Resonator Modes
by the Method of Resonance Excitation, I.E.E.E. Jour. of
Q.E. 4 (1968) 460
- 50) R. Yamada, Y. Sugio: The Excitation of Fabry-Perot
Resonator, Japan. J. Appl. Phys. 7 (1968) 304
- 51) 古浜: 共焦点ファブリ・ペロー共振器の励振理論 (平面波による強
制励振の場合, 電子通信学会 マイクロ波研究会資料 (1968 年 11 月))
- 52) R. Yamada, M. Kawano: Excitation of the Spherical Fabry-
Perot Resonator, Japan. J. Appl. Phys. 8 (1969) 630
- 53) 榎戸, 鈴木: 異方性媒質を満たした Fabry Perot 共振器, 電子通
信学会 マイクロ波研究会資料 (1967 年 9 月)
- 54) 榎戸, 鈴木, 松本, 上村: 無限長円筒状反射鏡よりなるファブリ・
ペロー共振器の入力アドミタンス, 電子通信学会論文誌 51-B
(1968) 95

- 55) 赤尾, 宮崎: 開放型共振器の導波管の結合理論 (入力インピーダンスについて), 昭 42 電子通信学会全国大会 No 528
- 56) 宮崎, 赤尾: 曲面からなる Fabry Perot 共振器の固有電磁界と励振特性, 昭 44 電気四学会全国大会 No 1515
- 57) R. Yamada: On the Plane Fabry-Perot Interferometer, Japan, J. Appl. Phys. 6 (1967) 904
- 58) H. Levine, J. Schwinger: On the Theory of Diffraction by an Aperture in an Infinite Plane Screen. I, Phys. Rev. 74 (1948) 958
- 59) E. H. Scheibe: Measurements on Resonators Formed from Circular Plane and Confocal Paraboloidal Mirrors, Proc. I.R.E. 49 (1961) 1079
- 60) 森口, 宇田川, 一松: 数学公式 I, 岩波書店 (1953)
- 61) G. Koppelman: Ein Mikrowellen-Perot-Fabry-Interferometer als Modell für den Laser-Resonator, Z. Phys. 173 (1963) 241
- 62) G. Koppelman: Mehrstrahlinterferenz und Beugung in abgeblendeten Parallelspiegel - Interferometern, Z. Phys. 191 (1966) 44
- 63) F. Westermann, W. Maier: Das Fabry-Perot-Interferometer im Mikrowellengebiet I. Eine Diskussion unter den Voraussetzungen der Optik Z. Phys. 179 (1964) 244
- 64) F. Westermann, W. Maier: Das Fabry-Perot-Interferometer im Mikrowellengebiet II Eine Diskussion unter Berücksichtigung von Beugungseffekten, Z. Phys. 179 (1964) 507
- 65) W. Culshaw: Reflectors for a Microwave Fabry-Perot Interferometer, I.R.E. Trans. MTT 7 (1960) 221
- 66) W. Culshaw: High Resolution Millimeter Wave Fabry-Perot Interferometer, I.R.E. Trans. MTT 8 (1961) 182
- 67) R. Ulrich, K.F. Renk, L. Genzel: Tunable Submillimeter Interferometers of the Fabry Perot Type, I.E.E.E. Trans. MTT 11 (1964) 363

- 68) R. W. Zimmerer: Spherical Mirror Fabry-Perot Resonator, I.E.E.E. Trans. MTT 11 (1964) 371
- 69) M. Lichtenstein, J. J. Gallagher, R. E. Cupp: Millimeter Spectrometer Using a Fabry-Perot Interferometer, Rev. Sci. Instr. 34 (1963) 843
- 70) H. Welling, H. G. Andresen: Design Problems and Performance of Millimeter-Wave Fabry-Perot Reflector Plates, I.E.E.E. Trans. MTT 12 (1965) 249
- 71) R.I. Primich, R.A. Hayami: The Application of the Focussed Fabry-Perot Resonator to Plasma Diagnostics, I.E.E.E. Trans. MTT 12 (1965) 33
- 72) 滝山, 繁沢: 50 Gc 帯共焦点共振器内の電磁界分布の測定, 輻射科学研究会資料 (1965年5月)
- 73) J.W. Dees, A.P. Sheppard: Fabry-Perot Interferometers at 168 G c/s, I.E.E.E. Trans. I.M. 14 (1965) 52
- 74) P. F. Checcacci, A. M. Scheggi: Microwave Models of Optical Resonators, Appl. Opt. 4 (1965) 1529
- 75) P. F. Checcacci, A. Consortini, A. M. Scheggi: Modes, Phase Shifts and Losses of Flat-Roof Open Resonators, Appl. Opt. 5 (1966) 1567
- 76) G. W. Farnell: Can. J. Phys. 36 (1958) 935
- 77) Y. F. Lum, T. J. F. Pavlasek: The Influence of Aberrations and Aperture Inclinations on the Phase and Intensity Structure in the Image Region of a Lens, I.E.E.E. Trans. A.P. (1964) 717
- 78) T. Li, H. Zucker: Modes of a Fabry - Perot Laser Resonator with Output - Coupling Apertures, J. Opt. Soc. Amer. 57 (1967) 984
- 79) D.E. McCumber: Eigenmodes of a Symmetric Cylindrical Confocal Laser Resonator and Their Perturbation by Output-Coupling Apertures, Bell. Syst. Tech. J. 44 (1965) 333

主 要 記 号 表

記 号	説 明	定 義 個 所
a	鏡の半径	2・1 図, 3・1 図, 4・1 図
$a_{n\ell}^{\pm}, a_{n\ell}, a_n$	開口面境界値 $\partial\varphi/\partial n$ の展開係数	(2・20), (4・9), (5・4)
$b_{n\ell}^{\pm}, b_{n\ell}, b_n$	開口面境界値 φ の展開係数	(2・19), (4・8), (5・3)
$C(t)$	フレネル積分	(2・45)
$c(t)$	フレネル積分の一変形	(2・47)
$c_{n\ell}^{\pm}, c_n$	有孔鏡共振器内側開口面の境界値 $\partial\varphi/\partial n$ の展開係数	(4・11)
$D_{ik}^{\rho r}$	傾斜鏡共振器における積分	(5・14)
$d_{n\ell}^{\pm}, d_n$	有孔鏡共振器内側開口面の境界値 φ の展開係数	(4・10)
$G(\mathbf{r} \mathbf{r}')$	平行平面導波管のグリーン関数	(2・4), (2・5), (2・7)
$H(\mathbf{r} \mathbf{r}')$	自由空間のグリーン関数	(2・10)
$H_{\ell}^{(1)}(A), H_{\ell}(A)$	第 1 種ハンケル関数	
$I_{nm}(\kappa)$	モード変換行列の積分にあらわれる関数	(2・34)
$J_{\ell}(A)$	ベッセル関数	
$K(\mathbf{r} \mathbf{r}')$	$z=0$ で境界条件を満たすグリーン関数	(3・11)
K_1, K_2, K	鏡の傾斜パラメータ	(5・12), (5・13), (5・25)
K_{nm}^{ℓ}, K_{nm}	モード変換行列要素	(2・29)
k	波数	
L	共振器軸長	2・1 図
L_{nm}^{ℓ}, L_{nm}	モード変換行列要素	(2・30)
ℓ	角方向モード番号	(2・7)
M_{nm}^{ℓ}, M_{nm}	モード変換行列要素	(2・31)
m	導波管モードの z 方向のモード番号 または円筒導波管, 同軸線モードの番号	(2・34) (3・63), (4・42)
N	フレネル数	(2・25), (2・27)

\bar{N}	有孔鏡共振器の孔のフレネル数	(4・19)
N_{nm}^{ℓ}, N_{nm}	モード変換行列要素	(2・32)
n	法線方向ベクトル	2・1図
n, n_0	導波管モードの z 方向のモード番号	(2・7), (2・26)
P	パワー	(2・57)
P_{nm}	有孔鏡共振器のモード変換行列要素	(4・75)
$P_{\ell}(\alpha, \beta)$	積分	(3・56)
Q	共振器の Q	(2・106)
Q_{nm}	有孔鏡共振器のモード変換行列要素	(4・76)
$Q_{\ell}(\alpha, \beta, x)$	積分	(3・54)
R	ベッセル関数の比	(4・45)
R_{nm}	有孔鏡共振器のモード変換行列要素	(4・77)
r	円筒座標変数	
\mathbf{r}	空間座標を示す三次元ベクトル	
S	共振器開口面	2・1図
S_a, S_b	有孔鏡共振器の外側および内側開口面	4・1図
S_{nin}	有孔鏡共振器のモード変換行列要素	(4・78)
$S(t)$	フレネル積分	(2・44)
$s(t)$	フレネル積分の一変形	(2・46)
\mathbf{s}	電力の流れ	(2・55)
T	パワー透過率	(3・40)
$u_{n\ell}^{\pm}$	一つの導波管モードの定在波	(5・6)
$u(r, \theta)$	有孔鏡共振器への入射平面波の横方向分布	(4・3)
z	円筒座標変数, 共振器の軸方向を示す	2・1図
z_1, z_2	傾斜鏡の z 座標の位置を示す	(5・12), (5・13)
α	フレネル数の平方根の逆数に比例するパラメータ	(2・35)
$\bar{\alpha}$	孔のフレネル数の平方根の逆数に比例するパラメータ	(4・41)
β_1, β_2, β	鏡の傾斜方向を示す方位角	(5・12), (5・13), (5・21)

Γ_n	内部媒質が複素屈折率を有するときの ベッセル関数の変数	(2・109)
r_1, r_2, r	鏡の傾斜角	(5・51), (5・56)
A	強制励振における行列式 または有孔鏡共振器における行列式 または傾斜鏡共振器における行列式	(2・66) (4・35) (5・40)
Δ_k, Δ_ℓ	行列式	(5・43)
Δ_n	共振の半値幅	(2・105)
$\Delta_{ij}^{\ell\ell'}$	傾斜鏡共振器における積分	(5・15)
δ_d	one transitの回折損失	(2・107)
$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	ディラックのデルタ関数	(2・4)
δ_{nm}	クロネッカーのデルタ記号	(2・21)
ε	強制励振源の半径を表わすパラメータ	(2・59)
ε_ℓ	1または2の数値	(2・9)
η	傾斜鏡共振器において座標軸とモード軸のなす角	(5・3), (5・4)
θ	円筒座標変数	
κ	積分変数	(2・29), (2・32)
Λ	積分変数 または Λ_n の略記 (§ 2・4, § 3・5, 第5章)	(2・33)
Λ_n	モードに対応するベッセル関数の変数	(2・8)
$\overline{\Lambda_n}$	有孔鏡共振器のベッセル関数の変数	(4・17)
$\Lambda_{\ell m}$	ベッセル関数の根	(2・97)
λ	自由空間波長	
μ	ハンケル関数を含む式	(4・34)
$\overline{\mu}$	ベッセル関数を含む式	(4・31)
ξ	定数	(4・39)
ρ	+または-を表わす	(5・14)
σ	鏡面上の強制励振源または透過鏡	2・1図, 3・1図

σ_0	傾斜鏡共振器において傾斜していない鏡の位置	5・1図
σ_1, σ_2	傾斜鏡共振器において傾斜している鏡の位置	5・1図
τ	+または-を表わす	(5・14)
$\varphi(\mathbf{r})$	波動関数	(2・1)
$\varphi_0(\mathbf{r})$	強制励振源	(2・3)
	または共振器外部からの励振波	(3・8)
$\varphi_i(\mathbf{r})$	共振器内部の波動関数	(2・6)
$\varphi_e(\mathbf{r})$	共振器外部の波動関数	(2・14)
$\varphi_i(r, \theta)$	透過鏡の共振器内部面上の波動関数	(3・4)
$\varphi_e(r, \theta)$	透過鏡の共振器外部面上の波動関数	(3・3)
$\varphi_I(\mathbf{r})$	有孔鏡共振器内部の波動関数	(4・1)
$\varphi_{II}(\mathbf{r})$	" 外部 "	(4・2)
$\varphi_{III}(\mathbf{r})$	" 外部で入射波の存在する領域 での波動関数	(4・3)
ψ	平面波の入射角	(3・50)
$\psi_{n\ell}^{\pm}, \psi_n$	励振強度	(2・28), (3・18), (5・5)
+, -	$\cos \ell\theta, \sin \ell\theta$ に対応するもの	(2・19), (2・20)